

Elektrodynamik II

Prof. Dr. techn. Wolfgang M. Rucker

SS 2001

Elektrotechnik (Diplom)

4. Fachsemester

Allgemeines:

Diese Vorlesung findet jeden Dienstag von 11.30 Uhr – 13.00 Uhr im Hörsaal V 47.03 statt.

Übungen finden jeden zweiten Montag von 14.00 Uhr – 15.30 Uhr im Hörsaal V 47.03 statt.

RECHTLICHE HINWEISE

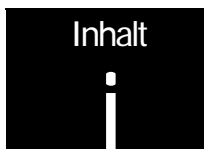
Copyright © 2001

Frank Illenseer

Alle Rechte vorbehalten.

Vervielfältigung und Abschriften, sämtliche Verfahren zur Speicherung, Fotokopie sowie die elektronische Speicherung und Weiterverarbeitung auch einzelner Abschnitte/Textpassagen (mit Ausnahme der Vervielfältigung zum persönlichen Gebrauch [gem. §53/54, URG]) sind ohne ausdrückliche Erlaubnis der Verfasser nicht zulässig.

Printed in Germany.



Inhaltsverzeichnis

2. Das stationäre elektrische Strömungsfeld [Fortsetzung] 5

2.7. Beispiele elektrischer Strömungsfelder 5

2.7.1. Punktförmige Quelle (Punktelektrode) 5

2.7.2. Kugelerder unter Berücksichtigung der Erdoberfläche (Tiefenerder) 5

3. Das Magnetfeld stationärer Ströme – Magnetostatik – 7

3.1. Das Durchflutungsgesetz 7

• Betrachtet man ein beliebiges elektrisches Strömungsfeld 7

• für stationäre Ströme gilt: 7

• bei zeitabhängigen Strömungsfeldern 8

• Verallgemeinerung des Durchflutungsgesetzes (in integraler Form): 8

3.2. Die magnetische Flussdichte 8

3.3. Das magnetische Vektorpotential A 8

Differentialgleichung für A 9

3.4. Das Biot-Savart'sche Gesetz 10

• Berechnung des Magnetfeldes von Stromverteilungen 10

3.4.1. Biot-Savart'sches Gesetz für dünne geschlossene Leiterschleifen 10

• Berechnung des magnetischen Flusses: 10

3.5. Das skalare magnetische Potential 10

3.6. Beispiele von Magnetfeldern 11

3.6.1. Gerader dünner Leiter ("Stromfaden") 11

• unendlich langer dünner Leiter 12

3.6.2. Gerader Leiter mit kreisförmigem Querschnitt 13

• magnetisches Vektorpotential 13

3.6.3. Kreisförmige Leiterschleife 14

• magnetisches Vektorpotential 15

3.6.4. Zylinderspule 16

• magnetisches Vektorpotential 17

3.7. Magnetische Felder in Materie 17

3.7.1. Der magnetische Dipol 18

• magnetische Feldstärke 18

• Magnetostatik fiktiver magnetischer Ladungen 18

3.7.2. Magnetisierung 18

3.7.3. Magnetische Flussdichte im Medium 20

3.7.4. Verhalten der magnetischen Größen an Grenzflächen 21

• Brechungsgesetz der Magnetostatik 21

• Magnetisches Vektorpotential 21

• Magnetisches Skalarpotential 21

3.7.5. Magnetisierbare Körper im homogenen Magnetfeld 21

3.8. Die magnetische Energie 23

3.9. Die Induktivität 24

• magnetische Energie 24

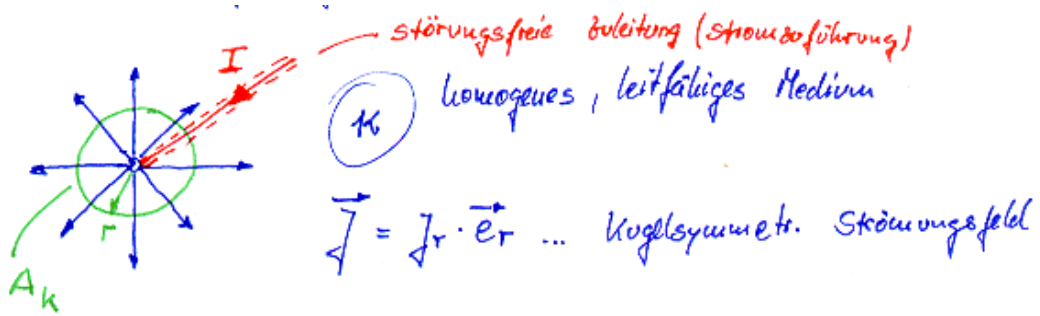
4. Zeitlich langsam veränderliche Magnetfelder – quasistationäre Magnetfelder –	26
4.1. Das Induktionsgesetz	26
• für ruhende Körper gilt	26
• bei bewegten Körpern tritt die zusätzliche induzierte Feldstärke auf	26
• Induzierte Spannung	26
• Darstellung von E durch Hilfspotentiale	27
4.2. Grundgleichung für quasistationäre Feldprobleme	27
• Maxwellsche Gleichungen in der quasistationären Näherung:	27
• Herleitung der Diffusionsgleichung	27
• Gleichung für die Potentiale	28
• Zeitharmonische Felder	28
4.3. Felddiffusion im unendlich ausgedehnten leitenden Raum	29
• Diffusionsgleichung:	29
4.4. Felddiffusion im leitenden Halbraum	30
• Lösung des allg. Problems:	30
4.4.1. Diffusion eines Zeitharmonischen Magnetfeldes – Skineffekt	30
• Zeitharmonische Differentialgleichung:	31
• Verteilung der induzierten (harmonischen) Wirbelströme im leitenden Medium	31
• Wirbelstromverluste	31
• Gesamtstrom pro Längeneinheit I	32
5. Elektromagnetische Wellen	33
5.1. Maxwell'sche Gleichungen	33
5.2. Die Wellengleichungen	33
5.3. Ebene Wellen als einfache Lösung der Wellengleichung	34
• Transversal elektromagnetische Welle (TEM)	35
5.4. Harmonische ebene Wellen	36
• Dispersionsbeziehung:	36
• Phasengeschwindigkeit	37
• Gruppengeschwindigkeit	37
• Polarisierung	37
• Stehende Wellen	38
5.5. Reflexion und Berechnung von elektromagnetischen Wellen	38
5.5.1. Reflexion an einer ideal leitenden Fläche (Wand)	39
5.5.2. Reflexion und Brechung an der Grenzfläche zwischen 2 Dielektrika	40
1) Das elektr. Feld liegt senkrecht zur Einfallsebene – senkrechte Polarisierung	40
2) parallele Polarisierung	41

2. DAS STATIONÄRE ELEKTRISCHE STRÖMUNGSFELD [FORTSETZUNG]

2.7. Beispiele elektrischer Strömungsfelder

V01 - 24.04.2001

2.7.1. Punktförmige Quelle (Punktelektrode)



$$I = \oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \oint_{A_k} J_r \cdot dA_k = J_r \oint_{A_k} dA_k = J_r \cdot 4\pi r^2$$

$$\rightarrow J_r = \frac{I}{4\pi r^2} \tag{2.32}$$

bzw. $E_r = \frac{I}{4\pi \kappa r^2}$ (2.33)

• **Punktquelle außerhalb des Ursprungs:**

$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \tag{2.34}$$

(\vec{r}_1 ... Quellpunktsvektor)

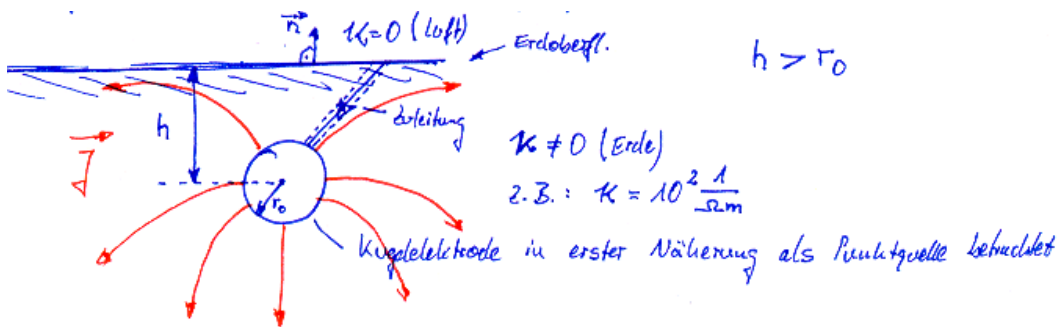
$$\vec{E} = \frac{I}{4\pi \kappa} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \tag{2.35}$$

• **Potential: (E = -gradφ)**

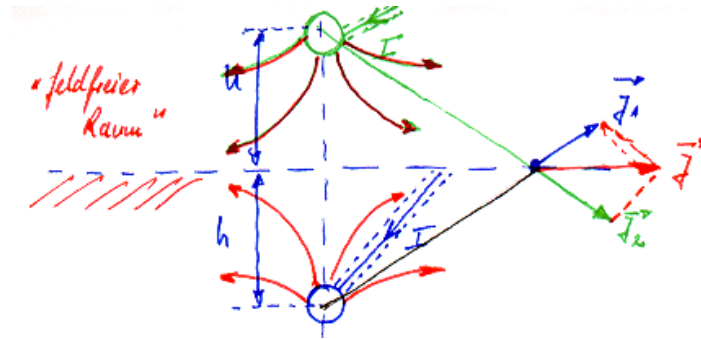
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi \kappa r} \tag{2.36}$$

bzw. $\varphi(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi \kappa |\vec{r} - \vec{r}_1|}$ (2.37)

2.7.2. Kugelerder unter Berücksichtigung der Erdoberfläche (Tiefenerder)



- Randbedingungen an der Erdoberfläche: $J_n = 0$... Normalkomponente d. Stromdichte
- Erfüllung durch Einführung einer **Bildquelle** nach Spiegelungsmethode



• **Potentialverteilung:**

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

• **Spannung zwischen dem Tieferderer und einem unendlich fernen Punkt:**

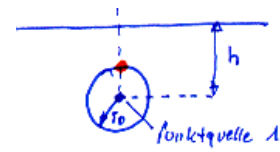
$$U = \varphi_E - \varphi_\infty = \varphi \Big|_{r_1=r_0}^{r_2=2h-r_0} \quad (\text{mit } \varphi_\infty = 0)$$

$$U = \frac{I}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h-r_0} \right) \quad ; \quad h > r_0$$

$$U \approx \frac{I}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} \right) = I \cdot R_E \quad R_E \dots \text{Erdungswiderstand}$$

$$R \approx \frac{1}{4\pi\kappa r_0} \left(1 + \frac{r_0}{2h} \right) \quad (2.38)$$

= R_E einer Kugelelektrode im unendlich ausgedehnten Medium



3. DAS MAGNETFELD STATIONÄRER STRÖME – MAGNETOSTATIK –

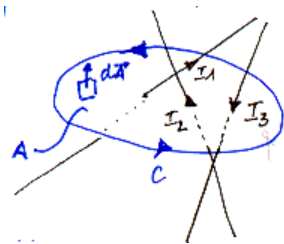
3.1. Das Durchflutungsgesetz

- Kraftwirkung zwischen Stromdurchflossenen Leitern und auf Magnetnadeln
→ Definition der magnetischen Feldstärke
- Experimente von H.-C. Oested, 1820:
 - sehr lange, dünne Leiter (∞ -lange Stromfäden)
→ magnetische Kräfte exakt proportional zu $1/r$
 - magnetische Feldlinien sind Kreise um den Leiter
- Für einen beliebigen geschlossenen Weg um den stromführenden Leiter gilt:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \tag{3.1}$$

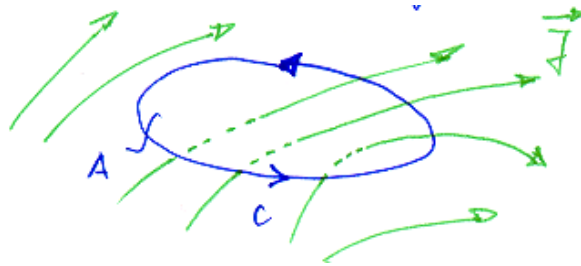
Diese Gleichung gilt für beliebig geformte Leiter!

- Es gilt das Superpositionsprinzip:



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_I I_i = \Theta \quad \dots \text{ Durchflutung} \quad (I_i \text{ ist vorzeichenbehaftet, d.h. an } d\vec{A} \text{ orientiert}) \tag{3.2}$$

- Betrachtet man ein beliebiges elektrisches Strömungsfeld



mit Gleichung (2.5) $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ "Durchflutungsgesetz" (3.3)

mit Hilfe des Stokes'schen Integralsatzes: (1.94; $E \rightarrow H$)

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

bzw. $\int_A (\text{rot } \vec{H} - \vec{J}) \cdot d\vec{A} = 0$ für beliebige Flächen A, d.h. $\text{rot } \vec{H} - \vec{J} \stackrel{!}{=} 0$

→ $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ (3.4)

- ↳ das Durchflutungsgesetz in differentieller Form
- ↳ die 1. Maxwell'sche Gleichung für zeitunabhängige (stationäre) Vorgänge.

- für stationäre Ströme gilt:

$$\text{div } \vec{J} = 0 \tag{(2.8)}$$

was auch durch die Beziehung (1.98) $\text{div rot } \vec{H} = 0$ bestätigt wird.

• bei zeitabhängigen Strömungsfeldern

→ Kontinuitätsgleichung (2.7)

muss (3.4) entsprechend ergänzt werden:

$$\text{mit (1.33)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$(2.7) \rightarrow \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0 = \operatorname{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\text{bzw.} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.5)$$

↳ 1. Maxwell'sche Gleichung für zeitabhängige (instationäre) Vorgänge.

• Der zusätzliche Term (der von J. C. Maxwell eingeführt wurde) besitzt die Einheit einer Stromdichte und wird

$$\text{als Verschiebungsstromdichte bezeichnet:} \quad \vec{J}_V = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.6)$$

• Verallgemeinerung des Durchflutungsgesetzes (in integraler Form):

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} = I_L + I_V \quad I_V \dots \text{Verschiebungsstrom} \quad (3.7)$$

3.2. Die magnetische Flussdichte

V02 - 08.05.2001

$$\text{Def.:} \quad \text{im Volumen gilt} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \left[\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T} \right] \quad (3.8)$$

mit der Permeabilität des Vakuums $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$

$$\bullet \text{ magnetischer Fluß durch eine Fläche } A: \quad \phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (3.9)$$

• Erfahrungstatsache: Fluß durch eine geschlossene Fläche (Hüllfläche) verschwindet.

$$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{Gauß'scher IS (1.40; } \vec{D} \rightarrow \vec{B}) \quad \int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV \quad \dots \text{ gilt für beliebige Volumina}$$

$$\rightarrow \operatorname{div} B = 0 \quad (3.10)$$

↳ 4. Maxwell'sche Gleichung

↳ Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte (magnetische Induktion)

3.3. Das magnetische Vektorpotential A

• Zur Berechnung von Magnetfeldern von stromführenden Leitern führt man ein magnet. Vektorpotential ein.

• Aufgrund von Gleichung (3.4) ($\operatorname{rot} H = J \neq 0$) ist die Definition eines skalaren Potentials nicht im gesamten Raum möglich, sondern kann sich nur auf stromfreie Gebiete ($\operatorname{rot} H = 0$) beschränken.

• Es gilt für jeden beliebigen Vektor F: $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0 \quad ((1.95))$

→ Daher kann man mit (3.10) die magnetische Flussdichte in der Form

$$\vec{B} = \operatorname{rot} A \quad (A \dots \text{magnet. Vektorpotential}) \quad (3.11)$$

darstellen.

• mit (3.11) ist jedoch kein eindeutiges Vektorpotential festgelegt, da

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$$

und man ein anderes Vektorpotential A'

$$A' = A + \operatorname{grad} f$$

wählen kann, wobei

$$B = \operatorname{rot} A' = \operatorname{rot} A + \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \operatorname{rot} A \quad [\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0]$$

→ eindeutiges Vektorpotential durch die Eichung (Festlegung von f)

$$\text{z.B. Coulomb-Eichung:} \quad \operatorname{div} A = 0 \quad (3.12)$$

$$(\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f = 0)$$

→ vorteilhaft für statische Probleme!

Differentialgleichung für A

(3.4) mit (3.8) und (3.11) liefert

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot rot } \vec{A} = \vec{J}$$

$$\rightarrow \text{rot rot } A = \mu_0 J \tag{3.13}$$

→ mit der Vektorbeziehung (Satz von Graßmann)

$$\text{rot rot } F = \text{grad div } F - \Delta F \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times F) &= \nabla (\nabla \cdot F) - F \cdot (\nabla \cdot \nabla) & [F \cdot (\nabla \cdot \nabla) &= F \cdot \Delta] \\ a \times (b \times c) &= b \cdot (a \cdot c) - c \cdot (a \cdot b) \end{aligned}$$

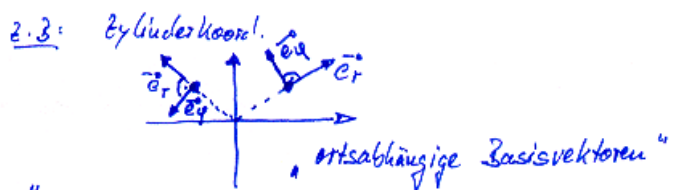
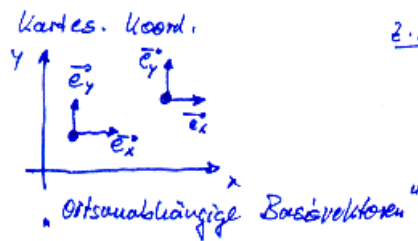
und mit der Coulomb-Eichung (3.12) ergibt sich:

$$\Delta A = -\mu_0 J \tag{3.15}$$

eine vektorielle Poissongleichung für A.

Gleichung (3.15) kann **NUR** bei ortsunabhängigen Basisvektoren eines Koordinatensystems in 3 skalare Poissongleichungen zerlegt werden!

z.B.



$$\begin{aligned} \Delta A_x &= -\mu_0 J_x & (3.16a) \\ \Delta A_y &= -\mu_0 J_y & (3.16b) \\ \Delta A_z &= -\mu_0 J_z & (3.16c) \end{aligned}$$

~~$$\begin{aligned} \Delta A_r &= -\mu_0 J_r \\ \Delta A_\phi &= -\mu_0 J_\phi \end{aligned} \tag{3.16} \text{ (gilt nicht!)}$$~~

Die Lösung kann nun analog zu (1.74) erfolgen:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$A_x = \mu_0 \int_V \frac{J_x(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{3.17a}$$

$$A_y = \mu_0 \int_V \frac{J_y(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{3.17b}$$

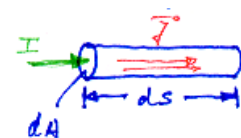
$$A_z = \mu_0 \int_V \frac{J_z(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{3.17c}$$

→ Zusammenfassung zu einem Vektor

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{3.18}$$

für dünne Leiterschleifen (Stromfäden) gilt:

$$J \cdot dV' = J dA ds$$



$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 I \oint_C \frac{ds'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{3.19}$$

3.4. Das Biot-Savart'sche Gesetz

• **Berechnung des Magnetfeldes von Stromverteilungen**

→ (3.11) und (3.18)

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(\vec{r}) &= \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) && \nabla \dots \text{Ableitungen nach } x, y, z \\
 &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' && \text{wobei } \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\
 &&& \text{(siehe Punktladung in Elektrostatik)}
 \end{aligned}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \tag{3.20}$$

Biot-Savart'sches Gesetz für allgemeine Stromdichte im Raum

3.4.1. Biot-Savart'sches Gesetz für dünne geschlossene Leiterschleifen

V03 - 15.05.2001

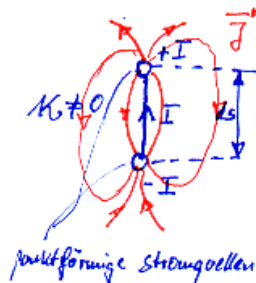
$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 I \oint_C \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{3.21}$$

• die differentielle Form

$$d\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 I \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

ist **nicht** das Feld eines Stromelementes $I \cdot d\vec{s}'$, **sondern** das Feld eines **Stromdipols**:

(↪ quellenfreies Strömungsfeld)



(Feldbild analog zum elektrischen Dipol)

$$\text{rot } d\vec{B} = \mu_0 d\vec{J}$$

$$\text{div rot } d\vec{B} = \text{div } d\vec{J} = 0 \quad (!)$$

• **Berechnung des magnetischen Flusses:**

$$\Phi = \int_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_a \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{a} \stackrel{\text{Stokes IS}}{=} \int_a \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{a} \stackrel{(1.94)}{=} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad \text{a ... Fläche; A ... magnet. Vektorpotential} \tag{3.22}$$

3.5. Das skalare magnetische Potential

• Im stromfreien Gebiet ($\vec{J} = 0$) gilt nach (3.4) $\text{rot } \vec{H} = 0$ (3.23)

und man kann ein magnetisches Skalarpotential ψ einführen:

$$\vec{H} = -\text{grad } \psi \tag{3.24}$$

• DGL erhält man mit (3.8) und (3.10):

$$\Delta \psi(\vec{r}) = 0 \quad \dots \text{Laplace-Gleichung} \tag{3.25}$$

Lösung: mit (3.24) analog zu (1.51)

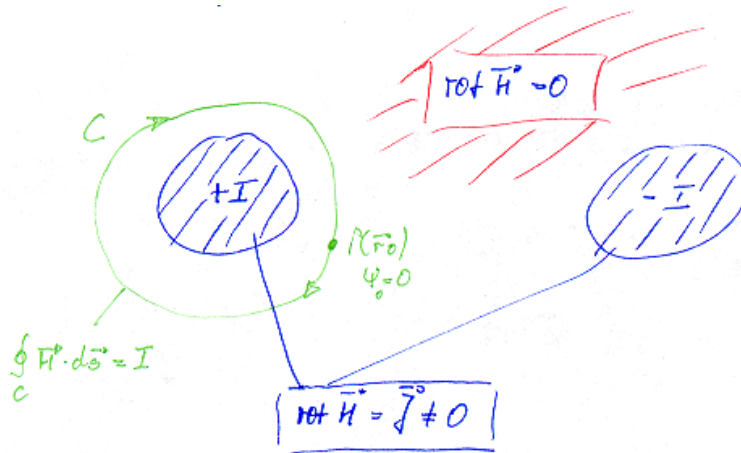
$$\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}_0) - \int_{P(\vec{r}_0)}^{P(\vec{r})} \vec{H} \cdot d\vec{s} \tag{3.26}$$

→ Dies setzt voraus, dass nicht nur $\text{rot } H = 0$ ((3.23)), sondern auch

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{3.27}$$

erfüllt ist.

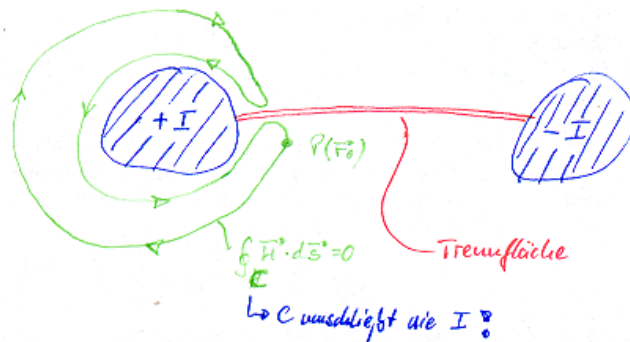
Das ist bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten, die stromführende Bereiche umschließen **nicht** erfüllt:



→ Potential ψ ist nicht mehr eindeutig! (Mehrfache Umläufe werden auch möglich.)

↳ Abhilfe: Aufschneiden des Gebietes

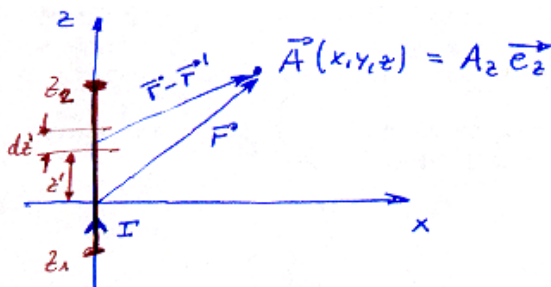
→ einfach zusammenhängendes Gebiet (Trennflächen entstehen)



3.6. Beispiele von Magnetfeldern

3.6.1. Gerader dünner Leiter ("Stromfaden")

• der gerade dünne Leiter wird als Teil einer geschlossenen Leiterschleife betrachtet: ($\text{div } J = 0$)



nach (3.19) gilt:
$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}}$$
 [$x^2 + y^2 = r^2$ in Zylinderkoord.]

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\text{arsinh} \left(\frac{z - z_1}{r} \right) - \text{arsinh} \left(\frac{z - z_2}{r} \right) \right]$$

bzw.
$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \ln \frac{z - z_1 + \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}}{z - z_2 + \sqrt{r^2 + (z - z_2)^2}}$$

"Feldanteil": nach (3.21) gilt

$$1) \quad \vec{B}(x, y, z) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{e}_z dz'}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)^3} \quad \text{mit } r = (x, y, z)$$

$$\rightarrow B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot y \cdot \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)^3}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot x \cdot \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)^3}$$

$$2) \quad B = \text{rot } A = \nabla \times A_z \vec{e}_z = \nabla A_z \times \vec{e}_z$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{e}_y \quad \text{(kartesische Koordinaten)}$$

$$= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e}_\phi \quad \text{(Zylinderkoordinaten)}$$

$$\rightarrow B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{y}{r^2} \cdot \left[\frac{z - z_2}{\sqrt{r^2 + (z - z_2)^2}} - \frac{z - z_1}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}} \right]$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{x}{r^2} \cdot \left[\frac{z - z_2}{\sqrt{r^2 + (z - z_2)^2}} - \frac{z - z_1}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}} \right]$$

$$\text{bzw. } B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\frac{z - z_1}{\sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{r^2 + (z - z_2)^2}} \right]$$

Anmerkung:

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\text{arsinh} \left(\frac{z - z_{1,2}}{r} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z - z_{1,2}}{r} \right)^2}} \cdot \left(-\frac{z - z_{1,2}}{r^2} \right)$$

$$= -\frac{z - z_{1,2}}{r \sqrt{r^2 + (z - z_{1,2})^2}}$$

↳ nicht den Logarithmus ableiten! (schwieriger!)

• **geschlossene Stromkreise**



→ Koordinatentransformation: $B_x, B_y \rightarrow B_{\bar{x}}, B_{\bar{y}}$

• **unendlich langer dünner Leiter**

Grenzübergang: $z_1 \rightarrow -\infty$ $z_2 \rightarrow \infty$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{\underbrace{(z - z_1)^2}_{\rightarrow 0}}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{\underbrace{(z_2 - z)^2}_{\rightarrow 0}}}} \right]$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{(bzw. aus dem Durchflutungsgesetz)}$$

- **magnetisches Vektorpotential:** $A = A_z(r) \cdot e_z$

$$B_\phi(\vec{r}) = -\frac{dA_z}{dr} \quad | \text{ Integration}$$

$$A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C \quad , \text{ wobei } C = A_z|_{r=r_0} = 0 \text{ festgelegt; } r_0 \dots \text{ Bezugsradius}$$

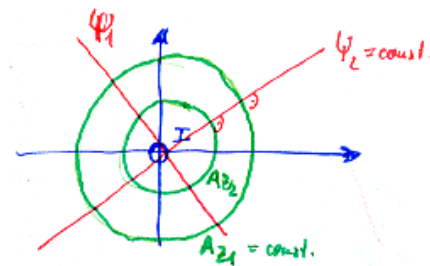
$$A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \quad A_z = \text{const.} \rightarrow \text{ Kreise um den Leiter}$$

- **magnetisches Skalarpotential:**

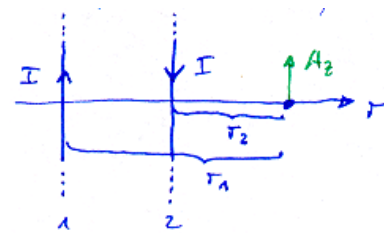
$$\psi = \psi_0 - \int_{P_0}^{P(\vec{r})} \vec{H} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{I}{2\pi r} r d\phi' \quad \Phi_0 : \psi = \psi_0 = 0 \quad ; \quad ds \dots \text{ Weg entlang einer Feldlinie}$$

$$\psi = -\frac{I}{2\pi} (\Phi - \Phi_0)$$

$\Phi = \text{const.} \rightarrow$ Geraden durch den Ursprung



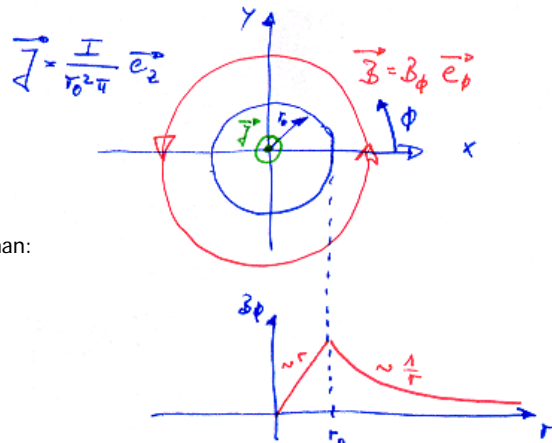
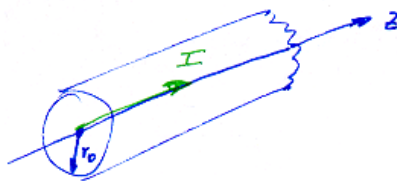
z.B. Doppelleitung



$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

3.6.2. Gerader Leiter mit kreisförmigem Querschnitt

V04 - 22.05.2001



- mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes (3.3) erhält man:

$$1) \quad r \leq r_0: \quad B_\phi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r$$

$$2) \quad r \geq r_0: \quad B_\phi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- **magnetisches Vektorpotential**

$$\vec{A} = A_z(r) \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e}_\phi = B_\phi \vec{e}_\phi$$

1) $r \leq r_0$: $\Delta A_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\mu_0 \frac{I}{r_0^2 \pi} = -\mu_0 J_z$

1. Integration: $r \cdot \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\mu_0 \frac{I}{r_0^2 \pi} \frac{r^2}{2} + C_1$

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\mu_0 \frac{I}{r_0^2 \pi} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} = -B_\phi$$

2. Integration: $A_z = -\mu_0 \frac{I}{r_0^2 \pi} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$

Bestimmung von C_1 und C_2 :

1) $r = 0$: $B_\phi =$ endlich: $C_1 = 0$

2) Wahl von $A_z = 0$ bei $r = r_0$ (willkürlich): $C_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$

$\rightarrow A_{z(1)}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$

2) $r \geq r_0$: $\Delta A_z = 0$ (wg. $I = 0$)

1. Integration: $\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{C_3}{r} = -B_\phi$ } aus 1) mit $I = 0$

2. Integration: $A_z = C_3 \ln r + C_4$

Bestimmung von C_3 und C_4 :

1) $r = r_0$: $B_{\phi_1} = B_{\phi_2}$... stetiger Übergang $\rightarrow \frac{\partial A_{z_1}}{\partial r} = \frac{\partial A_{z_2}}{\partial r}$

2) $r = r_0$: $A_{z_1} = A_{z_2} = 0$... gewählt

$$C_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \quad ; \quad C_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_0$$

$\rightarrow A_{z(2)}(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$

3.6.3. Kreisförmige Leiterschleife

ges.: B entlang der z-Achse

• Berechnung mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes:

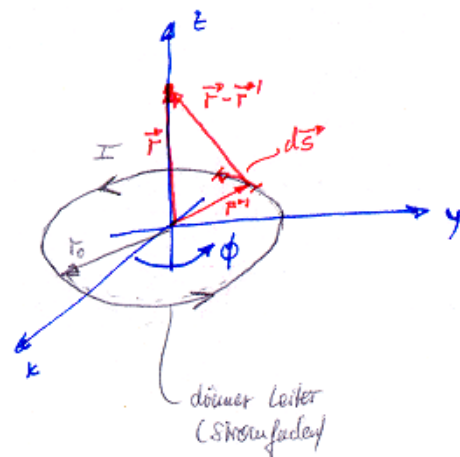
Wegelement: $d\vec{s} = r_0 d\phi' \vec{e}_\phi$ (Zyl.koord.)

$$d\vec{s} = -r_0 \sin \phi' \vec{e}_x + r_0 \cos \phi' \vec{e}_y$$

$$\vec{r}' = r_0 \cos \phi' \vec{e}_x + r_0 \sin \phi' \vec{e}_y \quad ; \quad 0 \leq \phi' \leq 2\pi$$

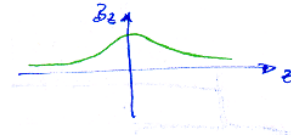
$$\vec{r} = z \vec{e}_z \quad ; \quad (\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s} = \begin{pmatrix} -z \cdot r_0 \cdot \cos \phi' \\ z \cdot r_0 \cdot \sin \phi' \\ r_0^2 \end{pmatrix} d\phi'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 I \oint \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \mu_0 I \int_0^{2\pi} \left[\frac{\begin{pmatrix} -z \cdot r_0 \cdot \sin \phi' \\ -z \cdot r_0 \cdot \cos \phi' \\ r_0^2 \end{pmatrix}}{4\pi \sqrt{r_0^2 + z^2}^3} \right] d\phi'$$



- aus Symmetriegründen: $B_x = B_y = 0$ (auf z-Achse)

$$B_z = \mu_0 I \frac{r_0^2}{2[r_0^2 + z^2]^{3/2}}$$



• magnetisches Vektorpotential

$$\vec{A} = A_\phi \vec{e}_\phi \quad (\text{rein azimuthal})$$

- 1) entlang der z-Achse: $A_\phi = 0$ (aus Symmetriegründen)

- 2) $r \neq 0$: Aufpunkt: $(r, 0, z) = (r, \phi, z)$; $\phi = 0$

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{r_0 \cos \phi' d\phi'}{\sqrt{z^2 + r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos \phi'}}$$

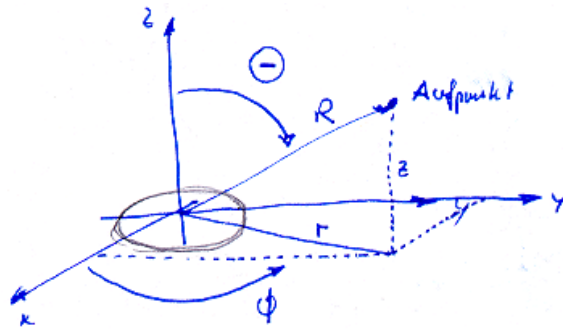
→ elliptische Integrale!

• Magnetfeld abseits der z-Achse

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_z \vec{e}_z = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \vec{e}_z$$

• Für $r_0 \ll r, z$ gilt:

(entfernte Aufpunkte oder kleine Kreisschleife)



Kugelkoordinaten $\sin \Theta = \frac{r}{R}$; $R = \sqrt{z^2 + r^2}$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{z^2 + r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos \phi'}{R^2}}} = \frac{1}{R} \left[1 - 2 \frac{r_0}{R} \sin \Theta \cos \phi' + \frac{r_0^2}{R^2} \right]^{-1/2}$$

$$\stackrel{\text{Binomialentwicklung}}{\approx} \frac{1}{R} \left[1 + \frac{r_0}{R} \sin \Theta \cos \phi' + \underbrace{O\left(\frac{r^2}{R^2}\right)}_{\text{höhere Ordnungen}} \right]$$

$$\approx \frac{1}{R} \left[1 + \frac{r_0}{R} \sin \Theta \cos \phi' \right]$$

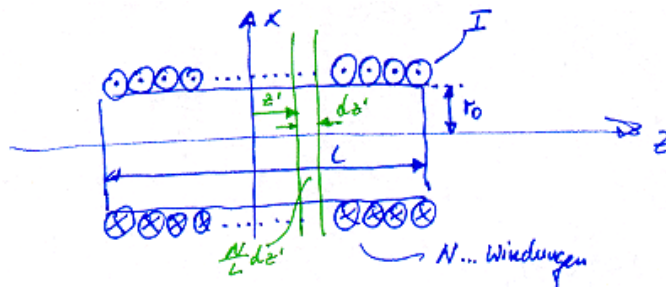
$$A_\phi \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0}{R} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \left[\cos \phi' + \frac{r_0}{R} \sin \Theta \cos^2 \phi' \right] d\phi'$$

$$A_\phi \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 \sin \Theta \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2}$$

$\cos^2 \phi' = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\phi')) = \frac{1}{2}$

$$A_\phi \approx \frac{\mu_0 I r_0^2 \pi}{4\pi R^2} \cdot \sin \Theta$$

3.6.4. Zylinderspule



• **dichtgewickelte Spule:** (die Ganghöhen der einzelnen Windungen werden vernachlässigt)

B: Überlagerung der Teilfelder der einzelnen Windungen
entlang der z-Achse:

Strom im Element dz': $dl = \frac{I \cdot N}{L} dz'$

$$B_z = \mu_0 \frac{I \cdot N}{L} \frac{r_0^2}{2} \int_{z'=-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[r_0^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

$$B_z = \mu_0 \frac{I \cdot N}{2L} \left[\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \right]$$

$$\rightarrow \int \frac{ds}{\left(\sqrt{r_0^2 + s^2}\right)^3} = \frac{s}{r_0^2 \sqrt{r_0^2 + s^2}} + C$$

hier: $s = z - z'$; $ds = -dz'$

• **für die unendlich lange Spule gilt:**

($N \rightarrow \infty$)

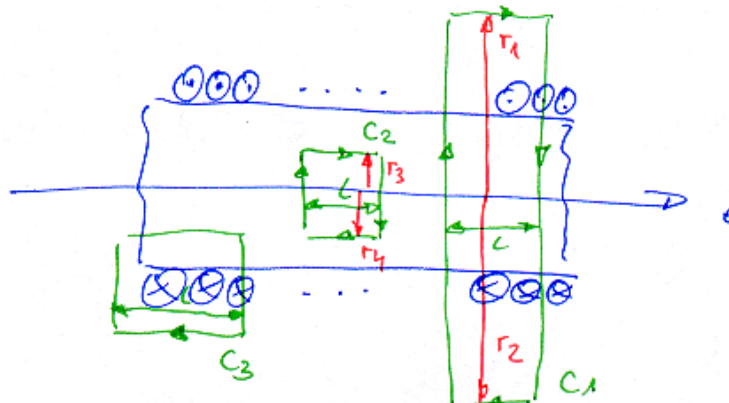
$$B_z = \lim_{L \rightarrow \infty} \mu_0 \frac{I \cdot N}{2L} \left[\frac{1 + \frac{2z}{L}}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{\left(z + \frac{L}{2}\right)^2}}} + \frac{1 - \frac{2z}{L}}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2}}} \right] = \mu_0 \frac{I \cdot N}{L} = \mu_0 \cdot I \cdot N' = B_{z_0}$$

N' ... Windungen pro Längeneinheit

• **innerhalb der (gesamten) Spule:** $\vec{B} = B_{z_0} \vec{e}_z = const.$

• **außerhalb der Spule:** $B = 0$

→ Beweis mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes



V05 – 29.05.2001

$$\begin{aligned}
 1) \quad \oint_{\hat{C}_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 &= [B_{z_a}(r_1) - B_{z_a}(r_2)] l \quad \rightarrow \quad B_{z_a}(r_1) = B_{z_a}(r_2) = \text{const.} \stackrel{r_{1,2} \rightarrow \infty}{=} 0 \\
 2) \quad \oint_{\hat{C}_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 &= [B_{z_i}(r_3) - B_{z_i}(r_4)] l \quad \rightarrow \quad B_{z_i}(r_3) = B_{z_i}(r_4) = B_{z_0} = \text{const.} \\
 3) \quad \oint_{\hat{C}_3} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 \cdot I \cdot N = B_{z_0} \cdot l \quad \rightarrow \quad B_{z_0} = \mu_0 \frac{I \cdot N}{l} = \mu_0 \cdot I \cdot N'
 \end{aligned}$$

• magnetisches Vektorpotential

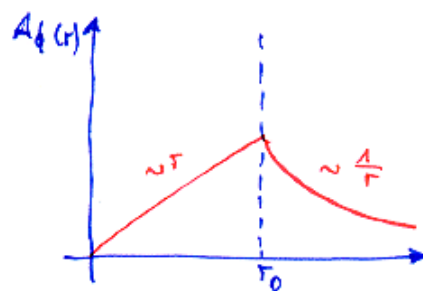
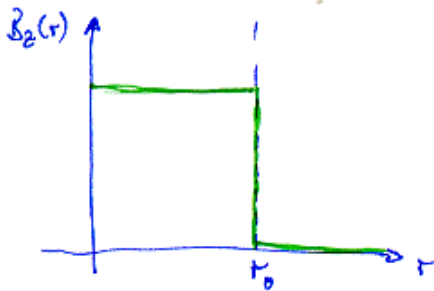
nach (3.22) gilt: $\Phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (*)$

Innenraum: $r \leq r_0 \quad \Phi = \int_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = B_{z_0} \cdot r^2 \cdot \pi = A_{\phi_i} 2\pi r \quad (*)$

$$\rightarrow A_{\phi_i} = \frac{B_{z_0} r}{2} = \frac{\mu_0 I N'}{2} r \quad \sim r$$

Außenraum: $r \geq r_0 \quad \Phi = \underbrace{B_{z_0} r_0^2}_{\text{const.}} \pi = A_{\phi_a} 2\pi r$

$$\rightarrow A_{\phi_a} = \frac{B_{z_0} r_0^2}{2r} = \frac{\mu_0 I N' r_0^2}{2r} \quad \sim \frac{1}{r}$$



3.7. Magnetische Felder in Materie

• "äußeres" Magnetfeld \rightarrow die Materie wird magnetisiert

• Es treten sog. magnetische Dipole auf:

\rightarrow Elektronen in den Atomhüllen (atomare Kreisströme)

\rightarrow Spin der Elektronen (elementarer Drehimpuls)

1) induzierte Dipolmomente: Diamagnetismus

2) Ausrichtung vorhandener Dipolmomente: Paramagnetismus

Definition: $\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H} \quad (3.28)$

\rightarrow linearer Zusammenhang zwischen dem Magnetisierungsvektor \vec{M} und der magnetischen Feldstärke \vec{H}

χ_m ... magnetische Suszeptibilität

• diamagnetische Stoffe: χ_m ist negativ!

• paramagnetische Stoffe: χ_m ist positiv!

$\chi_m = \chi_m(T)$... temperaturabhängig

• ferromagnetische Stoffe: (Eisen, Nickel, Kobalt und Legierungen)

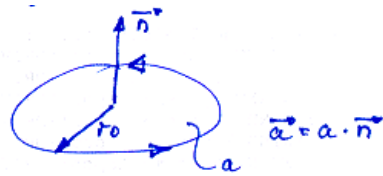
\rightarrow Spin der Elektronen: nichtlinearer Zusammenhang $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$... Magnetisierungskurve

\rightarrow Permanentmagnete

3.7.1. Der magnetische Dipol

- infinitesimale Stromschleife: $I \rightarrow \infty$ und $r_0 \rightarrow 0$

$$A_\phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r_0^2 \cdot \pi}{4\pi r^2} \sin \Theta$$



(3.29)

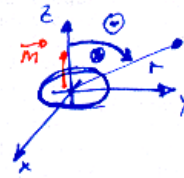
Definition: magnetisches Dipolmoment m

$$\vec{m} = \mu_0 \cdot I \cdot \vec{a}$$

mit $a = r_0^2 \pi$

(3.30)

$$\rightarrow A_\phi = \frac{m \cdot \sin \Theta}{4\pi r^2}$$



(3.31)

- in koordinatenfreier Schreibweise: $(r \rightarrow r - r_1)$

$$\vec{A} = \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

(3.32)

• magnetische Feldstärke

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad ; z.B. \vec{r}_1 = 0 ; \vec{m} = \text{const. Vektor}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \nabla \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\vec{m} \left(\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} \right]$$

1) $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} - 3 \frac{\vec{r}}{r^5} \cdot \vec{r} = 0$

2) $(\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{r} + \vec{r} \left(\vec{m} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} \right) = \dots$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r^3} \left[-\vec{m} + 3 \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} \right]$$

(siehe el. Dipol (1.196))

(3.33)

z.B.: $\vec{m} = m \cdot \vec{e}_z$: $B_r = \frac{2 \cdot m \cdot \cos \Theta}{4\pi r^3}$

(3.34)

$$B_\Theta = \frac{m \cdot \sin \Theta}{4\pi r^3}$$

(3.35)

$$B_\phi = 0$$

• Magnetostatik fiktiver magnetischer Ladungen

$$\vec{H} = -\text{grad } \psi$$

((3.24))

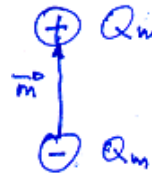
\rightarrow magnetischer Dipol (analog zum elektrischen Dipol)

$$m = Q_m \cdot d$$

(3.36)

$$\psi(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}{4\pi \mu_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

(3.37)



3.7.2. Magnetisierung

- makroskopische Mittelung der atomaren magnetischen Dipole in einem makroskopischen Volumenelement dV

$$d\vec{m} = \sum_i \vec{m}_i$$

und definieren die Magnetisierung als Volumendichte

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

(3.38)

→ nach (3.32) für das magnetische Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \tag{3.39}$$

bzw. mit $\text{grad}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \text{grad}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \tag{3.40}$$

Nach Umformung mit

1) $\text{rot}(f \cdot \vec{M}) = f \cdot \text{rot} \vec{M} - \vec{M} \times \text{grad} f$

2) $\int_V \text{rot} \vec{F} dV = - \oint_a \vec{F} \times d\vec{a}$... Variante des Gauß'schen Integralsatzes

erhält man

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot}' \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_a \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{a}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{3.41}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem Vektorpotential von räumlichen und flächenhaften Stromdichteverteilungen Gleichung (3.18) bzw. $\vec{J} \rightarrow \vec{K}$ und $\int_V \rightarrow \int_a$, dann lässt sich A als Volumen- und

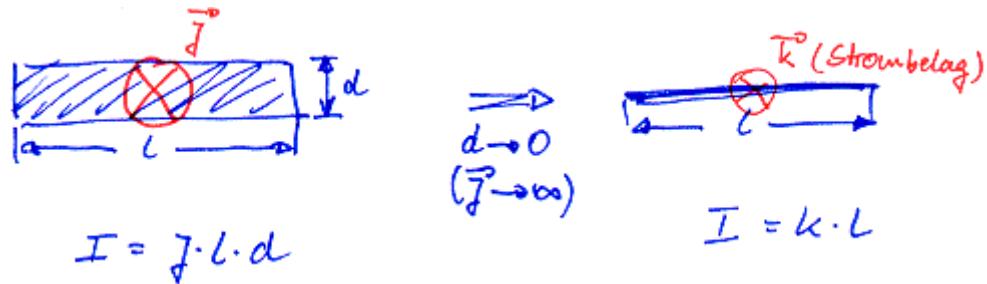
Flächenverteilung von sogenannten Magnetisierungsströmen darstellen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_{mag}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_a \frac{\vec{k}_{mag}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{a} \tag{3.42}$$

mit den Magnetisierungsstromdichten

$\vec{J}_{mag} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{M}$... räumlich verteilte Magnetisierungsstromdichte (3.43)

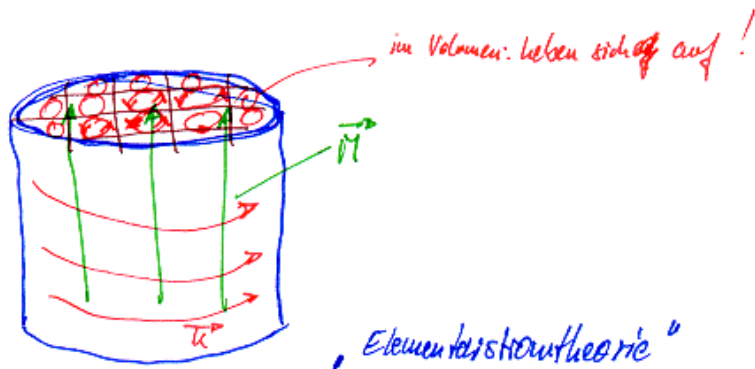
$\vec{k}_{mag} = \frac{1}{\mu_0} \vec{M} \times \vec{n}$... flächenhaft verteilte Magnetisierungsstromdichte (3.44) $\left[\frac{A}{m} \right]$



• Magnetisierungsströme sind elektrische Ströme

z.B.: homogen magnetisierter Körper

V06 - 05.06.2001



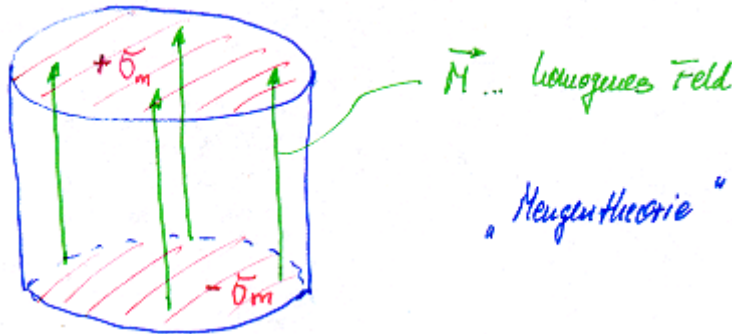
• **Analogie zur Elektrostatik**

→ fiktive magnetische Ladungen

$$\rho_m = -\operatorname{div} \vec{M} \quad (3.45)$$

$$\sigma_m = \vec{M} \cdot \vec{n} \quad (3.46)$$

Es gilt:
$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \oint_a \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot d\vec{a}'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{\mu_0} \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{M}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.47)$$



3.7.3. Magnetische Flussdichte im Medium

- Magnetfeld verursacht durch ferne Ströme in Leitern und durch an Materie gebundene Magnetisierungsströme

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\text{frei}} + \mu_0 \vec{J}_{\text{mag}} \stackrel{(3.43)}{=} \mu_0 \vec{J}_{\text{frei}} + \operatorname{rot} \vec{M} \quad (3.48)$$

d.h. es gilt

$$\operatorname{rot}(\vec{B} - \vec{M}) = \mu_0 \vec{J}_{\text{frei}} = \operatorname{rot}(\mu_0 \vec{H}) \quad (3.49)$$

↳ Def. von H entsprechend (3.4) für Vakuum

→
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (3.50)$$

- Gleichung (3.49) bedeutet, dass die Wirbel von H lediglich durch die freie Stromdichte bestimmt sind

- reines Materiefeld ($\vec{J}_{\text{frei}} = 0$) → H wirbelfrei!

nach (3.48) gilt: rot B = rot M

- Setzt man in (3.50) für lineare Medien die Beziehung (3.28) ein:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (3.51)$$

bzw.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (3.52)$$

mit $\mu = \mu_0 \mu_r$ (3.53)

wobei $\mu_r = 1 + \chi_m$ die relative Permeabilitätszahl ist. (3.54)

- Aus der Quellenfreiheit der Flussdichte B folgt

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 = \operatorname{div}(\mu_0 \vec{H} + \vec{M})$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \vec{M} \stackrel{(3.46)}{=} \frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (3.55)$$

bzw. mit (3.24)

$$\Delta \psi = -\frac{\rho_m}{\mu_0} \quad \dots \text{Poissongleichung der Magnetostatik} \quad (3.56)$$

3.7.4. Verhalten der magnetischen Größen an Grenzflächen

Aus den differentiellen Beziehungen (Maxwell'sche Gleichungen) folgt beim Übergang zur Betrachtung der Grenzfläche:

$$1) \quad \text{rot } \vec{H} \longrightarrow \text{Rot } \vec{H} = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \quad (3.57)$$

$$2) \quad \text{div } \vec{B} \longrightarrow \text{Div } \vec{B} = \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \quad (3.58)$$

dabei zeigt \vec{n} vom Gebiet ① in das Gebiet ②

Rot, Div werden als Flächenrotation bzw. Flächendivergenz bezeichnet.

• Nach (3.49) gilt:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{frei}} \rightarrow \text{Rot } \vec{H} = \vec{k}_{\text{frei}} \quad , \text{ wobei } k \dots \text{ Flächenstromdichte in der Grenzfläche} \quad (3.59)$$

$$\rightarrow \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{k}_{\text{frei}} \quad (3.60)$$

$$\text{für } \vec{k}_{\text{frei}} = 0 \Rightarrow \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

$$\text{bzw. } H_{1t} = H_{2t} \quad (3.61)$$

• Nach (3.10) gilt:

$$\text{Div } \vec{B} = \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (3.62)$$

$$\text{bzw. } B_{1n} = B_{2n} \quad (3.63)$$

• **Brechungsgesetz der Magnetostatik**

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (3.64)$$

• **Magnetisches Vektorpotential**

$$\text{Aus (3.11):} \quad \text{Rot } A = 0 \quad (3.65)$$

da keine flächenhafte Flussdichte existiert!

$$\rightarrow A_{1t} = A_{2t} \quad (3.66)$$

• Aus der Coulomb-Eichung (3.12) folgt

$$\text{Div } A = 0 \quad (3.67)$$

$$\rightarrow A_{1n} = A_{2n} \quad (3.68)$$

$$\text{damit gilt: } \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \quad (3.69)$$

Das magnetische Vektorpotential erfährt keine Brechung!

• **Magnetisches Skalarpotential**

analog zur Elektrostatik (1.158), (1.160) gilt:

$$\psi_1 = \psi_2 \quad (3.70)$$

$$\mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \quad (3.71)$$

, wenn keine fiktiven mag. Flächenladungen angenommen werden ($\rightarrow \sigma_m = 0$)

3.7.5. Magnetisierbare Körper im homogenen Magnetfeld

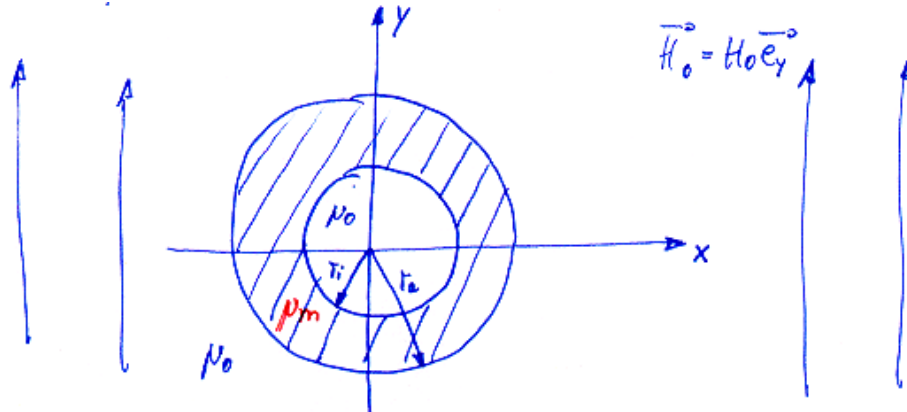
• Vorgehensweise analog zur Polarisation in der Elektrostatik (1.13.6)

• Definition eines Entmagnetisierungsfaktors N

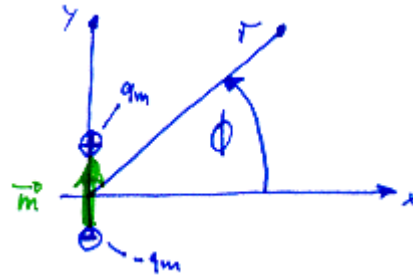
$$\vec{H}_j = \vec{H}_a - \frac{1}{\mu_0} \cdot N \cdot \vec{M} \quad (3.72)$$

mit $N = 1$... Platte
 $N = 1/2$... Zylinder
 $N = 1/3$... Kugel

• **Beispiel: Hohlzylinder im homogenen Feld H_0**



→ ein homogen magnetisierter Zylinder wirkt nach außen wie ein "ebener" magnetischer Dipol mit



$$\psi(r, \phi) = \frac{m \cdot \sin \phi}{2\pi \mu_0 r}$$

$$H_r(r, \phi) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{m \cdot \sin \phi}{2\pi \mu_0 r^2}$$

$$H_\phi(r, \phi) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = -\frac{m \cdot \cos \phi}{2\pi \mu_0 r^2}$$

mit $m = q_m \cdot d$; q_m ... fiktive magnetische Linienladung

→ im Innenraum stellt sich ein homogenes Magnetfeld $\vec{H}_i = H_i \cdot \vec{e}_y$ ein.

Lösungsansätze für die einzelnen Bereiche:

1) $0 \leq r \leq r_i$: $\psi_i = -H_i \cdot \underbrace{r \cdot \sin \phi}_y$

2) $r_i \leq r \leq r_a$: $\psi_m = -H_m \cdot r \cdot \sin \phi + \underbrace{\frac{C_m}{r} \sin \phi}_{(*)}$ (*) = Anteil d. ebenen Dipols im Zentrum ($r = 0$)

3) $r_a \leq r$: $\psi_a = -H_0 \cdot r \cdot \sin \phi + \underbrace{\frac{C_a}{r} \sin \phi}_{(*)}$

unbekannte Größen: H_i, H_m, C_m, C_a → 4 Gleichungen nötig

1) $r = r_i$: $H_i = H_m - \frac{C_m}{r_i^2}$ ← $\psi_i = \psi_m$

$\mu_0 H_i = \mu_m H_m + \mu_m \frac{C_m}{r_i^2}$ ← $\mu_0 \frac{\partial \psi_i}{\partial r} = \mu_m \frac{\partial \psi_m}{\partial r}$

2) $r = r_a$: $H_m - \frac{C_m}{r_a^2} = H_0 - \frac{C_a}{r_a^2}$ ← $\psi_m = \psi_a$

$\mu_m H_m + \mu_m \frac{C_m}{r_a^2} = \mu_0 H_0 + \mu_0 \frac{C_a}{r_a^2}$

V07 - 12.06.2001

$$\rightarrow H_i = \frac{4 \frac{\mu_m}{\mu_0} H_0}{\left(\frac{\mu_m}{\mu_0} + 1\right)^2 - \left(\frac{\mu_m}{\mu_0} - 1\right)^2 \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}$$

für $\frac{\mu_m}{\mu_0} \gg 1$ (hochpermeables Material) gilt:

$$H_i \approx \frac{4H_0}{\frac{\mu_m}{\mu_0} \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2\right]}$$

3.8. Die magnetische Energie

Analog zur Elektrostatik:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) dV \quad (3.73)$$

mit der magnetischen Energiedichte

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.74)$$

mit (3.11) und der Beziehung

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}$$

ergibt sich für (3.73)

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{H}) dV + \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} dV \quad (\text{mit GIS})$$

$$W = \frac{1}{2} \oint_{a_\infty} (\vec{A} \times \vec{H}) d\vec{a} + \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{A} \cdot \vec{J} dV$$

Es gilt $\oint_{a_\infty} (\vec{A} \times \vec{H}) d\vec{a} = 0$; wg. $\vec{A} \sim \frac{1}{r}$ (3.18) ; $\vec{H} \sim \frac{1}{r^2}$ (3.20) $\Rightarrow (\vec{A} \times \vec{H}) \sim \frac{1}{r^3} \rightarrow 0$; $\vec{a} \sim r^2 \rightarrow \infty$

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}) dV \quad (3.75)$$

Setzt man für A

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad ((3.18))$$

dann folgt

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_{V'} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV \quad (3.76)$$

Für ein System von dünnen Leiterschleifen:



$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(I_i I_j \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right) \quad (3.77)$$

3.9. Die Induktivität

Definition: $\Phi = L \cdot I$ Φ ... mag. Fluß; I ... flusserzeugender Strom (3.78)

• Fluß durch die i-te Leiterschleife:

$$\Phi_i = \oint_{C_i} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_i \tag{3.22}$$

mit
$$\vec{A}(\vec{r}_i) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^n \left(I_j \oint \frac{d\vec{s}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right) \tag{3.79}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^n \left(I_j \oint_{C_i, C_j} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right)$$

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} I_j \tag{3.80}$$

mit
$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i, C_j} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad \dots \text{Induktivität zwischen der i-ten und der j-ten Leiterschleife} \tag{3.81}$$

- L_{ij} ... Teilinduktivitäten bzw. Gegeninduktivitäten
- L_{ii} ... Selbstinduktivitäten der einzelnen Spulen
- $L_{ii} \rightarrow \infty$ bei unendlich dünnen Leitern, da $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = 0$
→ man muß bei der Berechnung von L_{ii} die endliche Leiterdicke berücksichtigen.

• **magnetische Energie**

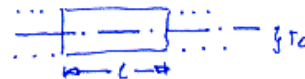
$$(3.77): \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \tag{3.82}$$

für eine einzelne Leiterschleife:

$$W = \frac{1}{2} I_{(1)} \Phi_{(1)} = \frac{1}{2} L_{(11)} I_{(1)}^2 \tag{3.83}$$

z.B.: Induktivität pro Längeneinheit einer unendlich langen Spule

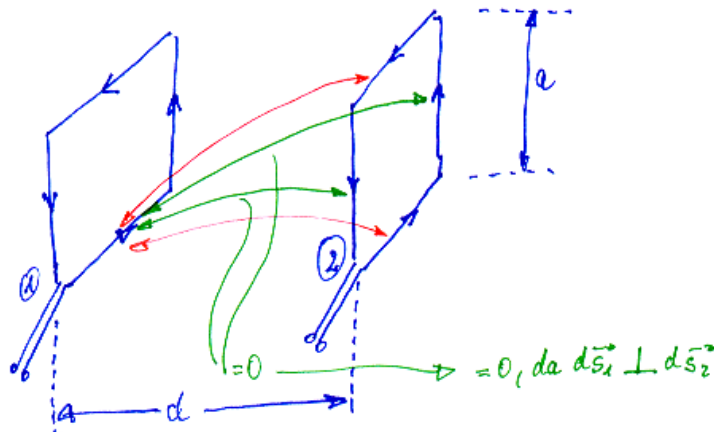


$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \frac{B_{z0}^2}{\mu_0} r_0^2 \pi l$$

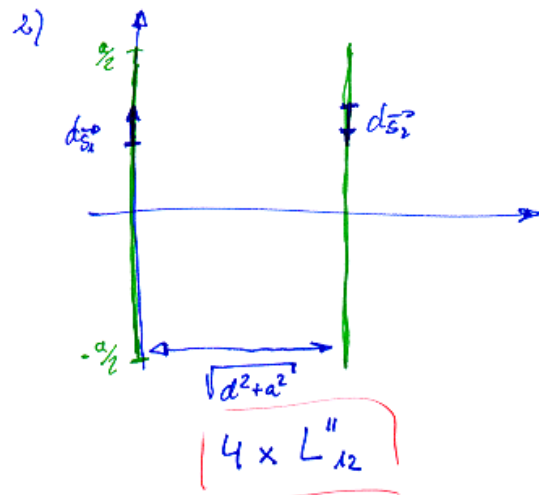
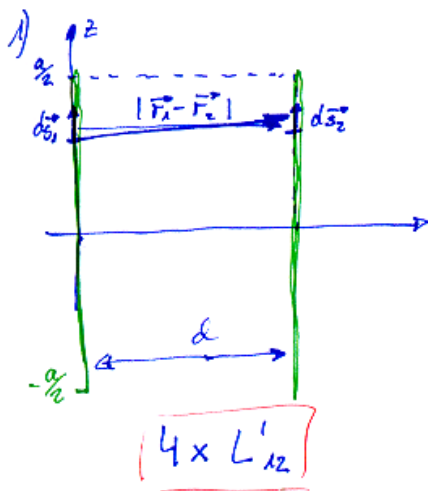
$$\frac{W}{I} = \frac{1}{2} I^2 \mu_0 N^2 r_0^2 \pi = \frac{1}{2} L' I^2 \quad , \text{ wobei } L' = L/l$$

$$\rightarrow L' = \mu_0 r_0^2 \pi N^2$$

z.B.: Induktivität zwischen zwei parallel angeordneten quadratischen Leiterschleifen



$L_{12} = L_{21}$ setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen:



$$L'_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dz_1 dz_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{l_1} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underbrace{\vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2}_{\hat{=} \phi\text{-Anteil}}$$

$$L'_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \ln \frac{z + \frac{a}{2} + \sqrt{d^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2}}{z - \frac{a}{2} + \sqrt{d^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2}} dz_{(2)}$$

$L''_{12} \rightarrow$ aus $-L'_{12}$ mit $d^2 \rightarrow d^2 + a^2$ ersetzen

$$\int \ln(x + \sqrt{d^2 + x^2}) dx = x \ln(x + \sqrt{d^2 + x^2}) - \sqrt{d^2 + x^2} + C$$

$$L'_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + d^2}}{d} \right) - \sqrt{a^2 + d^2} + d \right]$$

$$L''_{12} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \left[a \ln \frac{a + \sqrt{2a^2 + d^2}}{\sqrt{2a^2 + d^2}} - \sqrt{2a^2 + d^2} + \sqrt{a^2 + d^2} \right]$$

$$L_{12} = 4(L'_{12} + L''_{12})$$

$L_{11}, L_{22} \dots$ Selbstinduktivitäten

**4. ZEITLICH LANGSAM VERÄNDERLICHE MAGNETFELDER
– QUASISTATIONÄRE MAGNETFELDER –**

4.1. Das Induktionsgesetz

V08 – 19.06.2001

- Experimente vom M. Faraday (1831):

- zeitlich sich änderndes Magnetfeld induziert ein elektrisches Feld
- die in einem geschlossenen Weg auftretende Spannung (induzierte Spannung; = Ringspannung, Umlaufspannung)

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.1)$$

ist gleich der Abnahmegeschwindigkeit (magnetischer Schwund) des von der Kurve C umfassten magnetischen Flusses Φ .

- für ruhende Körper gilt

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_a \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad (\text{Integrale Form des Induktionsgesetzes}) \quad (4.2)$$

bzw. mit dem Stokes'schen IS:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{a} = - \int_a \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

folgt

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

die „vollständige“ zweite Maxwell'sche Gleichung (differenzielle Form des Induktionsgesetzes)

- bei bewegten Körpern tritt die zusätzliche induzierte Feldstärke auf

$$\vec{E} = \vec{V} \times \vec{B} \quad (4.4)$$

- Lorentzkraft: $\vec{F} = Q \cdot \vec{V} \times \vec{B} = Q \cdot \vec{E}$

- Induzierte Spannung

$$U_i = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \underbrace{\int_a \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}}_{\text{Ruheinduktion}} + \underbrace{\oint_C (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}}_{\text{Bewegungsinduktion}} \quad (4.5)$$

- Gleichung (4.5) ergibt sich auch aus (4.1), wenn man mit $\frac{d}{dt}$ die totale Zeitableitung betrachtet:

$$\frac{d}{dt} () = \frac{\partial}{\partial t} () + \vec{V} \cdot \nabla ()$$

d.h.:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}}{dt} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B} \\ &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{V}) + \vec{V} (\nabla \cdot \vec{B}) \\ &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot } (\vec{B} \times \vec{V}) + \vec{V} \cdot \underbrace{\text{div } \vec{B}}_{=0} \\ &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot } (\vec{V} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

• Darstellung von E durch Hilfspotentiale

$$U_j \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_a \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{a} = - \int_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{a} + \int_a \text{rot} (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a}$$

$$\rightarrow \int_a \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{V} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{a} = 0$$

bzw.:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{V} \times \vec{B} = -\text{grad } \varphi$$

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi + \vec{V} \times \vec{B} \quad \dots \text{ für den mit dem Leiter (Körper) mitbewegten Beobachter} \quad (4.7)$$

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad \dots \text{ für den ruhenden Beobachter} \quad (4.8)$$

4.2. Grundgleichung für quasistationäre Feldprobleme

• Maxwell'sche Gleichungen in der quasistationären Näherung:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \text{ in quasistationärer Näherung} \quad (4.9)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.10)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (4.11)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (4.12)$$

und die Materialbeziehungen für lineare Medien:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (4.13)$$

$$\vec{D} = \rho \cdot \vec{E} \quad (4.14)$$

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \quad (4.15)$$

• Quasistationäre Näherung:

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ wird vernachlässigt!}$$

→ physikalisch: Keine Wellenausbreitung

• Herleitung der Diffusionsgleichung

$$1) \quad \text{rot rot } \underbrace{(\mu \vec{H})}_{=\vec{B}} = \mu \cdot \text{rot} (\kappa \cdot \vec{E}) = -\mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{bzw.:} \quad \text{rot rot } \vec{B} = \underbrace{\text{grad div } \vec{B}}_{=0} - \Delta \vec{B}$$

$$\rightarrow \Delta \vec{B} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \dots \text{ Vektordiffusionsgleichung (wg. Vektorfeld)} \quad (4.16)$$

$$2) \quad \text{rot rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{wenn } \rho = 0 \rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{gilt } \Delta \vec{E} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (4.17)$$

$$\text{bzw.:} \quad \Delta \vec{J} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0 \quad (4.18)$$

- Diese Diffusionsgleichungen beschreiben die Diffusion („Zerfließen“) des magnetischen und elektrischen Feldes in einem leitfähigen Medium.

→ dieser Vorgang ist ein irreversibler Vorgang

→ Gleichung ist gegen Zeitumkehrung ($t \rightarrow -t$) **nicht** invariant (wg. 1. zeitlicher Ableitung)
man kann den Prozeß nicht einfach rückwärts laufen lassen!

• Gleichung für die Potentiale

$$1) \quad \text{rot rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} = \mu \cdot \kappa \cdot \vec{E} \stackrel{(4.8)}{=} -\mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu \cdot \kappa \cdot \text{grad } \varphi$$

$$\text{bzw.:} \quad \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\rightarrow \quad \Delta \vec{A} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{grad}(\text{div } \vec{A} + \mu \cdot \kappa \cdot \varphi)$$

$$(i) \quad \text{Coulomb-Eichung: } \text{div } \vec{A} = 0$$

$$(ii) \quad \text{"Lorentz-Eichung" für quasistationäre Probleme: } \text{div } \vec{A} = -\mu \cdot \kappa \cdot \varphi \quad (4.19)$$

$$\rightarrow \quad \Delta \vec{A} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \quad (4.20)$$

$$2) \quad \text{div } \vec{E} = -\text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \underbrace{\text{div grad } \varphi}_{\Delta \varphi} = 0 \quad (\rho = 0)$$

$$(i) \quad \text{div } \vec{A} = 0 \quad : \quad \Delta \varphi = 0$$

$$(ii) \quad \text{div } \vec{A} = -\mu \cdot \kappa \cdot \varphi \quad : \quad \Delta \varphi - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (4.21)$$

• Zeitharmonische Felder

Sinusförmige Ströme und Spannungen bzw. elektrische und magnetisch Felder

$$\text{z.B.:} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{B}}(\vec{r}) \cdot \cos(\omega t + \phi) = \text{Re} \left\{ \underline{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} \quad (4.22)$$

$$\text{mit} \quad \underline{\vec{B}}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) e^{j\phi} \quad \dots \text{ magnetischer Feldvektor} \quad (4.23)$$

Zeitableitung:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\omega \vec{B}(\vec{r}) \sin(\omega t + \phi) = \text{Re} \left\{ j\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} \quad (4.24)$$

$$\text{d.h.:} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

Damit ergibt sich als Zeitharmonische Diffusionsgleichung:

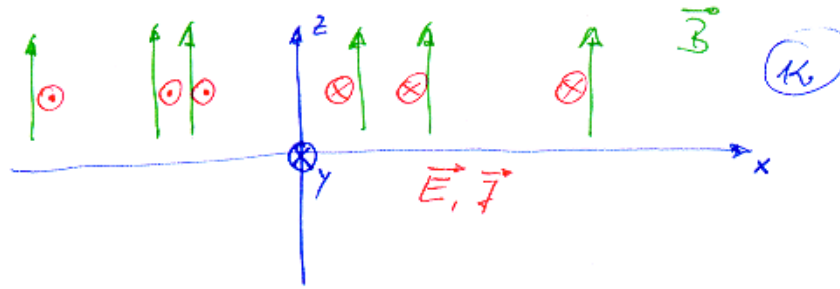
$$\underline{\Delta \vec{B}(\vec{r}) - j\omega \mu \kappa \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0} \quad \dots \text{ die sog. Helmholtzgleichung} \quad (4.25)$$

→ damit können nur eingeschwingene Diffusionsvorgänge beschrieben werden.

4.3. Felddiffusion im unendlich ausgedehnten leitenden Raum

V09 - 26.06.2001

- Annahme: $\vec{B}(\vec{r}; t) = B_z(x, t)\vec{e}_z$... räumlich, eindimensionale Feldverteilung



Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial x^2} - \mu\kappa \frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t} = 0 \tag{4.26}$$

Die Funktionen

$$B_z(x, t) = B_0 \sqrt{\frac{\mu\kappa}{4\pi t}} e^{-\frac{\mu\kappa(x-x')^2}{4t}} \tag{4.27}$$

... die Gaußkurve

erfüllt die Gleichung (4.26) mit den Randbedingungen, daß

B_z für $x \rightarrow \pm \infty$ endlich ist. (B_z verschwindet dort)

Weiter gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_0 \sqrt{\frac{\mu\kappa}{4\pi t}} e^{-\frac{\mu\kappa(x-x')^2}{4t}} dx = B_0 \tag{4.28}$$

→ Fläche unter der Gaußkurve ist=1

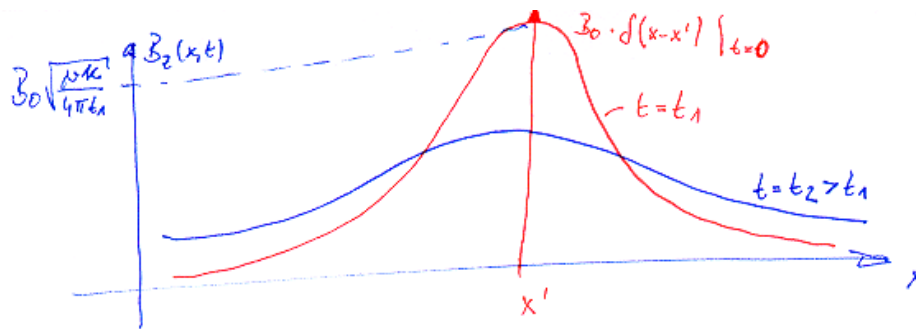
und

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\mu\kappa}{4\pi t}} e^{-\frac{\mu\kappa(x-x')^2}{4t}} = \delta(x-x') \tag{4.29}$$

→ Dirac'sche Deltafunktion

→ d.h. als Anfangsbedingung gilt:

$$B_z(x, 0) = B_0 \cdot \delta(x-x') \tag{4.30}$$



(gleiche Flächen unter den Kurven!)

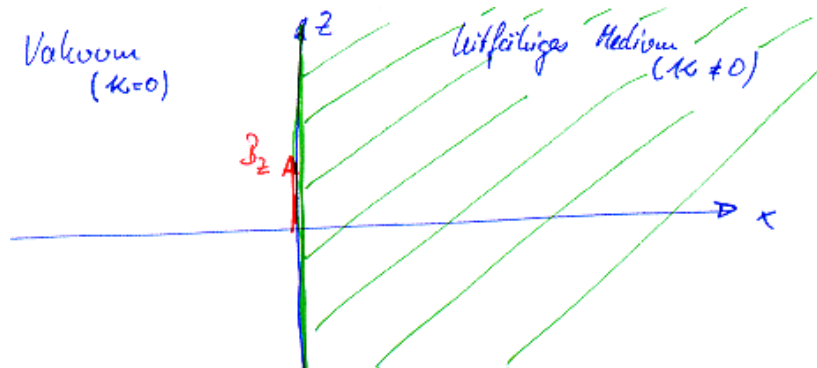
- Mit zunehmender Zeit t werden die Gaußkurven immer breiter und das Maximum sinkt $\rightarrow 0$; Diffusion (Zerfließen) des Anfangsfeldes
- Gleichung (4.27) stellt die Green'sche Funktion $G(x, x', t)$ für Diffusionsprobleme dar.
- Für eine beliebige Anfangsfeldverteilung:

$$B_z(x, 0) = B_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(x') \cdot \delta(x-x') dx' \tag{4.31}$$

ergibt sich daher:

$$B_z(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(x') \cdot G(x, x', t) dx' = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(x') \cdot \sqrt{\frac{\mu\kappa}{4\pi t}} e^{-\frac{\mu\kappa(x-x')^2}{4t}} dx' \tag{4.32}$$

4.4. Felddiffusion im leitenden Halbraum



• im leitenden Halbraum ($x \geq 0$) gilt:

$$\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x^2} - \mu\kappa \frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} = 0$$

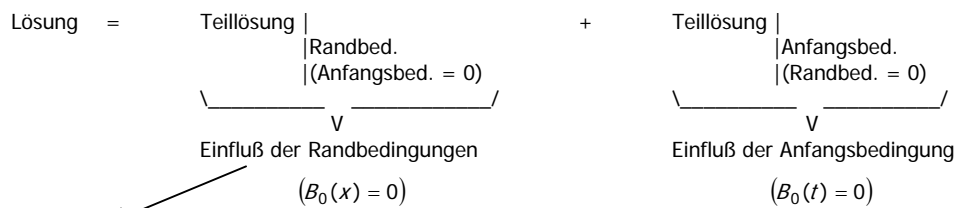
mit den Randbedingungen:

- 1) $B_z(0,t) = \overline{B_0}(t)$
- 2) $B_z(\infty,t) = \text{endlich}$

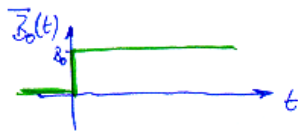
und den Anfangsbedingungen:

$$B_z(x,0) = B_0(x)$$

• Lösung des allg. Problems:

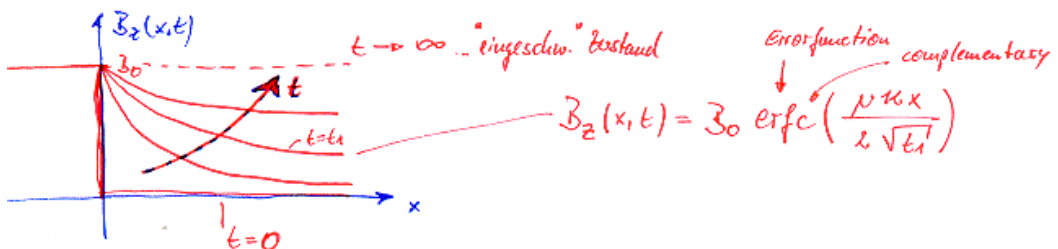


z.B.: Einschalten eines externen, konstanten Feldes (Gleichfeld) zum Zeitpunkt $t = 0$



$$\overline{B_0}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ B_0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

mit $B_z(x,0) = 0 ; x \geq 0$ (feldfreier Halbraum)



4.4.1. Diffusion eines Zeitharmonischen Magnetfeldes – Skinneffekt

• Betrachtung des eingeschwungenen Zustandes, d.h. die transienten Vorgänge (vgl. $erfc()$ in obigem Schaubild) beim Einschalten des Wechselfeldes sind abgeklungen.

$$B_z(0,t) = B_0 \cdot e^{j\omega t} \dots \text{Randbedingung}$$

$$B_z(x,t) = \text{abklingender (transienter) Feldanteil} + \text{eingeschwungener (periodialer) Feldanteil}$$

• Zeitharmonische Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \underline{B}_z(x)}{\partial x^2} - j\omega \mu \kappa \underline{B}_z(x) = 0 \quad (4.33)$$

$$\text{bzw.:} \quad \frac{\partial^2 \underline{B}_z(x)}{\partial x^2} - \underline{k}^2 \underline{B}_z(x) = 0 \quad (4.34)$$

$$\text{mit} \quad \underline{k} = \sqrt{j\omega\mu\kappa} = \pm(1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{\lambda}} \quad (4.35)$$

Lösungsansatz:

$$\underline{B}_z(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$$

Randbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} x=0: \underline{B}_z = B_0 \\ x \rightarrow \infty: \underline{B}_z = \text{endlich} \end{array} \right\} \begin{array}{l} C_2 = B_0 \\ C_1 = 0 \end{array} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} \operatorname{Re}\{\underline{k}\} > 0 \\ \operatorname{Im}\{\underline{k}\} > 0 \end{array}$$

Lösung:

$$\underline{B}_z(x) = B_0 \cdot e^{-kx} \quad (e^{j\omega t})$$

bzw.

$$\underline{B}_z(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \underline{B}_z e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ B_0 e^{j\omega t - kx} \right\} = B_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \quad (4.36)$$

$$\text{mit} \quad \underline{k} = \frac{1+j}{\delta} \quad (4.37)$$

$$\text{und} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}} \quad \dots \text{Eindringtiefe} \quad (4.38)$$

- Bei $x = \delta$ ist die Amplitude von $B_z(x, t)$ auf das 1/e-fache abgefallen!
- Der Phasenwinkel ist ortsabhängig, d.h. für konstante Phase gilt:

$$\omega t - \frac{x}{\delta} = \text{const}$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{dx}{dt} = \delta \omega = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\kappa}} = v_{ph} \quad (4.39)$$

➔ Betrachtet man verschiedene Zeitpunkte, so verändert sich die magnetische Feldstärke **wie** bei einer fortschreitenden Welle mit der Phasengeschwindigkeit v_{ph} .

• Verteilung der induzierten (harmonischen) Wirbelströme im leitenden Medium

$$\vec{J} = \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{e}_y$$

$$J_y(x, t) = \frac{1}{\mu \delta} \left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right] \cdot B_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$$

$$\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$J_y(x, t) = \sqrt{\omega \mu \kappa} \cdot H_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.40)$$

• Wirbelstromverluste

$$P(t) = \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty J_y^2(x, t) dx \quad ((2.31))$$

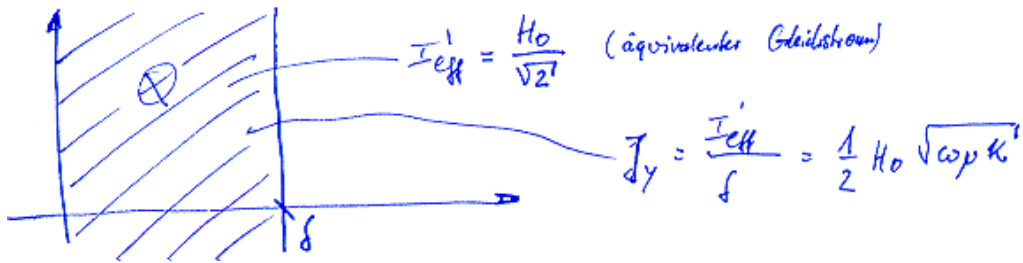
$$\bar{P} = \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \bar{J}_y^2(x, t) dx$$

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_y^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T J_y^2(x, t) dt \stackrel{(4.40)}{=} \frac{1}{T} \cdot \omega \cdot \mu \cdot \kappa \cdot H_0^2 \cdot e^{-\frac{2x}{\delta}} \cdot \int_0^T \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) dt \\
 &= \omega \cdot \mu \cdot \kappa \cdot H_0^2 \cdot e^{-\frac{2x}{\delta}} \cdot \frac{1}{2T} \cdot \int_0^T \left[1 + \cos\left[2\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)\right]\right] dt \\
 &= \frac{\omega \cdot \mu \cdot \kappa}{2} \cdot H_0^2 \cdot e^{-\frac{2x}{\delta}} \\
 \rightarrow \bar{P} &= \frac{\omega \cdot \mu}{2} \cdot H_0^2 \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2x}{\delta}} dx = \frac{\omega \cdot \mu}{2} \cdot H_0^2 \cdot \left(-\frac{\delta}{2}\right) \cdot e^{-\frac{2x}{\delta}} \Big|_0^\infty = \frac{\omega \cdot \mu}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\omega \cdot \mu \cdot \kappa}} \cdot H_0^2
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

... zeitlicher Mittelwert der Verlustleistung pro Flächeneinheit der Oberfläche des Halbraums

• Gesamtstrom pro Längeneinheit I

$$\begin{aligned}
 I' &= \frac{I}{l} = \int_0^\infty J_y(x, t) dx = - \int_0^\infty \frac{\partial H_z}{\partial x} dx = H_z(0, t) - \underbrace{H_z(\infty, t)}_{=0} \\
 \rightarrow I' &= H_0 \cdot \cos(\omega t)
 \end{aligned} \tag{4.42}$$



$$I'_{eff} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \quad (\text{äquivalenter Gleichstrom})$$

$$J_y = \frac{I'_{eff}}{\delta} = \frac{1}{2} H_0 \sqrt{\omega \mu \kappa}$$

$$\text{Verlustleistung: } \bar{P} = \bar{J}^2 R \stackrel{R = \frac{l}{\kappa A}}{=} \frac{H_0^2}{2} \frac{l}{\kappa \delta l} = \frac{H_0^2}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}}$$

\bar{J}^2 ... zeitl. Mittelwert des Quadrats von (4.42)

5. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

5.1. Maxwell'sche Gleichungen

Die **vollständigen Maxwell'schen Gleichungen** lauten:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \dots \text{ Durchflutungsgesetz} \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots \text{ Induktionsgesetz} \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \dots \text{ Quellenfreiheit des magnetischen Felds} \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \dots \text{ Coulomb'sches Gesetz} \quad (5.4)$$

Die Beziehungen zwischen den Feldgrößen sind durch die **Materialgleichungen** gegeben, die für homogene, lineare Medien die Form

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.5)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (5.6)$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad (5.7)$$

besitzen.

Die Materialkonstanten μ , ϵ und κ sollen im gesamten Raum **konstant** sein.

Die Lösungen der vollständigen Maxwell'schen Gleichungen stellen **elektromagnetische Wellen** dar.

5.2. Die Wellengleichungen

$$1) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} \stackrel{(5.5)}{=} \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} \stackrel{(5.1)}{=} -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \stackrel{(5.7)(5.6)}{=} -\mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.8)$$

bzw. mit $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$ erhält man

$$\Delta \vec{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.9)$$

die allgemeine Wellengleichung für die elektrische Feldstärke \vec{E} .

Für raumladungsfreie Gebiete ($\rho = 0$) ergibt sich:

$$\Delta \vec{E} - \underbrace{\mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{Diffusionsterm}} - \underbrace{\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}_{\text{Wellenausbreitungsterm}} = 0 \quad (5.10)$$

wobei sich im betrachteten **leitfähigen Medium** ($\kappa \neq 0$) Diffusionsvorgänge $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \text{Term} \right)$ und

Wellenausbreitungsvorgänge $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \text{Term} \right)$ überlagern

2) Die gleiche DGL erhält man für die **magnetische Feldstärke \vec{H}** :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} \stackrel{(5.1)}{=} \operatorname{rot} \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D} \stackrel{(5.7)(5.6)}{=} -\mu \kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (5.11)$$

Mit $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ folgt:

$$\Delta \vec{H} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.12)$$

- Für **nichtleitende Medien** ($\kappa = 0 \rightarrow$ Dielektrika) erhält man die speziellen Wellengleichungen:

$$\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.13)$$

$$\Delta \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.14)$$

5.3. Ebene Wellen als einfache Lösung der Wellengleichung

Annahme: $\frac{\partial}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ (Felder ändern sich nur in z-Richtung)

→ in jeder Ebene $z = \text{const.}$ ist das elektromagnetische Feld konstant (ebene Welle).

$$(5.13): \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.15)$$

$$(5.14): \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.16)$$

Alle Komponenten des elektromagnetischen Feldes $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ erfüllen die eindimensionale skalare Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (5.17)$$

Wie sich leicht zeigen lässt, stellen die beiden beliebigen Funktionalen

$$f_1 = f_1\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad (5.18)$$

und $f_2 = f_2\left(t + \frac{z}{c}\right)$ (5.19)

Lösungen der Gleichung (5.17) dar.

Dabei repräsentieren die Feldkomponenten proportional $f_1\left(t - \frac{z}{c}\right)$ eine ebene Welle, die in die positive z-Richtung läuft und jene Komponenten proportional $f_2\left(t + \frac{z}{c}\right)$ eine ebene Welle, die in negativer z-Richtung läuft.

Es gilt: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ (5.20)

... Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen (Lichtgeschwindigkeit) im betrachteten Medium

Beweis: $\frac{\partial f_1}{\partial z} = -\frac{1}{c} f_1'$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} f_1'' \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} f_2''$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = f_1'$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = f_1'' \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = f_2''$$

$$\frac{\partial^2 f_{12}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} f_{12}'' = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial t^2} \quad \checkmark$$

Man spricht von der sog. d'Alembert'schen Lösung der skalaren Wellengleichung

$$f = f_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{c}\right) \quad (5.21)$$

$$E_x = E_{1x}\left(t - \frac{z}{c}\right) + E_{2x}\left(t + \frac{z}{c}\right) \quad \text{dito für } E_y, E_z$$

$$\rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) + \vec{E}_2 \left(t + \frac{z}{c} \right) \quad (5.22)$$

mit E_1 ... el. Feldstärke der in positiver z-Richtung laufenden (vorwärtslaufenden) Welle

E_2 ... el. Feldstärke der in negativer z-Richtung laufenden (rückwärtslaufenden) Welle

$$1) \text{ rot } \vec{H}_1 = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (\vec{e}_z \times \vec{H}_1) \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{e}_z \times \vec{H}_1) \quad (**) \frac{\partial f_1}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f_1}{\partial t}$$

$$\rightarrow -\frac{\partial}{\partial z} (\vec{e}_z \times \vec{H}_1) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$$

nach Integration und Nullsetzen der zeitunabhängigen Konstanten ergibt sich

$$-\vec{e}_z \times \vec{H}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_1 \quad (5.23)$$

$$2) \text{ rot } \vec{E}_1 = -\mu \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{e}_z \times \vec{E}_1)$$

$$\rightarrow \vec{e}_z \times \vec{E}_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \vec{H}_1 \quad (5.24)$$

Aus (5.4) folgt:

$$a) \text{ div } \vec{E}_1 = \frac{\partial E_{1z}}{\partial z} = 0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_{1z}}{\partial t}$$

\rightarrow Integration und Nullsetzen der orts- und zeitabhängigen Konstanten:

$$E_{1z} = 0 \quad (5.25)$$

$$b) \text{ div } \vec{H}_1 = \frac{\partial H_{1z}}{\partial z} = 0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{1z}}{\partial t}$$

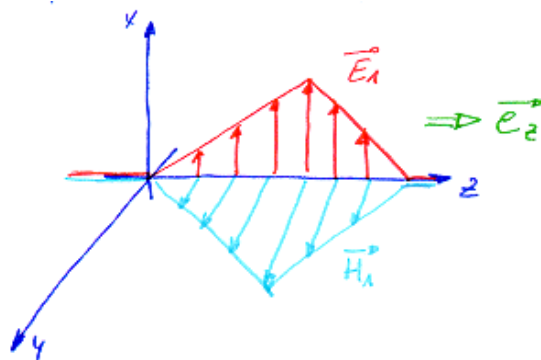
$$H_{1z} = 0 \quad (5.26)$$

• Transversal elektromagnetische Welle (TEM)

(\vec{E}_1, \vec{H}_1) breitet sich in positiver z-Richtung aus (vorlaufende Welle)

$$\text{z.B.: } \vec{E}_1 = E_{1x} \vec{e}_x$$

$$(5.24): \vec{H}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_{1x} \cdot \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_x)}_{=\vec{e}_y} = H_1 \cdot \vec{e}_y$$



- Die ebene Welle (\vec{E}_1, \vec{H}_1) läuft ohne Formänderung in die positive z-Richtung. (E_1, H_1, e_z bilden ein Rechtssystem)

• Wellenwiderstand:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \left[\left(\frac{Vs}{Am} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Vm}{As} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \left[\frac{V}{A} \right] = [\Omega] \quad (5.27)$$

$$\text{z.B. Vakuum: } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \approx 120\pi [\Omega] \quad (377 \Omega)$$

- für die rückwärtslaufende Welle

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = + \frac{1}{c} \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

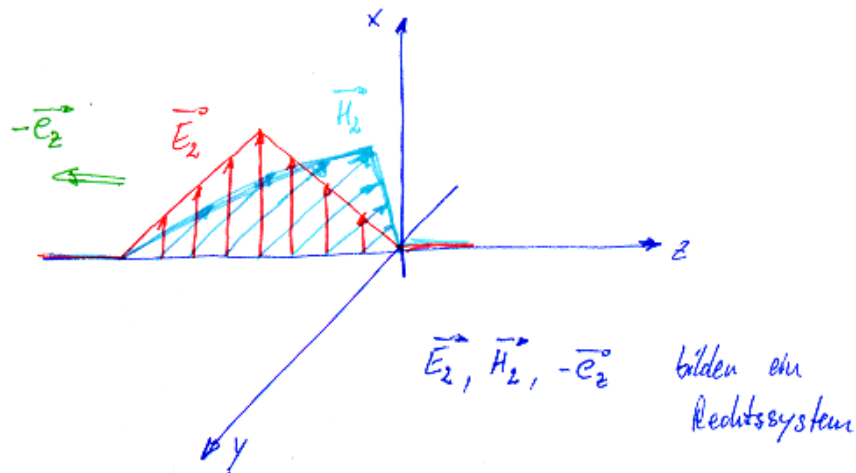
$$\vec{e}_z \times \vec{H}_2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}_2 \tag{5.28}$$

bzw. $-\vec{e}_z \times \vec{E}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}_2$ (5.29)

→ TEM-Welle ($E_{z_2} = 0 ; H_{z_2} = 0$), die sich in negativer z-Richtung ausbreitet.

z.B. $\vec{E}_2 = E_{2x} \vec{e}_x$

(5.29): $\vec{H}_2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_{2x} \cdot \underbrace{\vec{e}_z \vec{e}_x}_{=-\vec{e}_y} = H_{2y} \cdot \vec{e}_y$; wobei $H_{2y} = -\frac{E_{2x}}{z}$



• Diese (z.B. "dreiecksförmigen") "Wellenpakete" kann man sich durch Überlagerung geeigneter sinus- bzw. cosinusförmiger Wellen (harmonische Wellen) mit bestimmten Wellenlängen zusammensetzen. (Fourierintegral)

5.4. Harmonische ebene Wellen

z.B.: eine in z-Richtung sich ausbreitende cosinusförmige ebene Welle:

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

$$H_y(z, t) = H_{y0} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

mit $H_{y0} = \frac{E_{x0}}{z}$

• Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (5.30)

• Wellenzahl: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; λ ... Wellenlänge (5.31)

• **Dispersionsbeziehung:**

(5.15): $\frac{\delta^2 E_x}{\delta z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 E_x}{\delta t^2} = 0$

→ $\underbrace{\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)}_{=0} E_x = 0$

→ $k = \frac{\omega}{c}$ (5.32)

• Phasengeschwindigkeit

$$\omega t - k_z + \varphi = \text{const.}$$

$$v_{ph} = \frac{d_z}{d_t} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (5.33)$$

- Unter Dispersion versteht man die Tatsache, dass die Phasengeschwindigkeit eine Funktion der Frequenz (Wellenlänge) sein kann:

$$\omega = \omega(k) \quad : \quad v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} \quad (5.34)$$

- Die Beziehung (5.32) ist kennzeichnend für ein **dispersionsfreies Medium**, d.h. $v_{ph} = c$ für alle Frequenzen.

• Gruppengeschwindigkeit

$$v_G = \frac{d\omega(k)}{dk} = c \quad (5.32) \text{ für dispersionsfreies Medium} \quad (5.35)$$

- ist für die Übertragung von Signalen oder den Energietransport maßgeblich.

- Eine sich in beliebiger Richtung \vec{e}_a ausbreitende ebene Welle besitzt die Form:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0(\vec{r}) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right\} \quad (5.36)$$

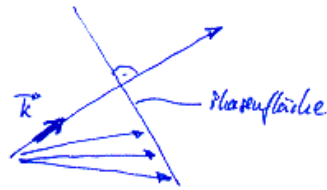
$$\text{mit} \quad \vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{j\varphi} \quad (5.37)$$

und dem Wellenzahlvektor \vec{k} :

$$\vec{k} = k \cdot \vec{e}_a = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_a \quad (5.38)$$

der in die Ausbreitungsrichtung zeigt.

Die Ebenen $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.}$ sind dabei die Flächen konstanter Phase.



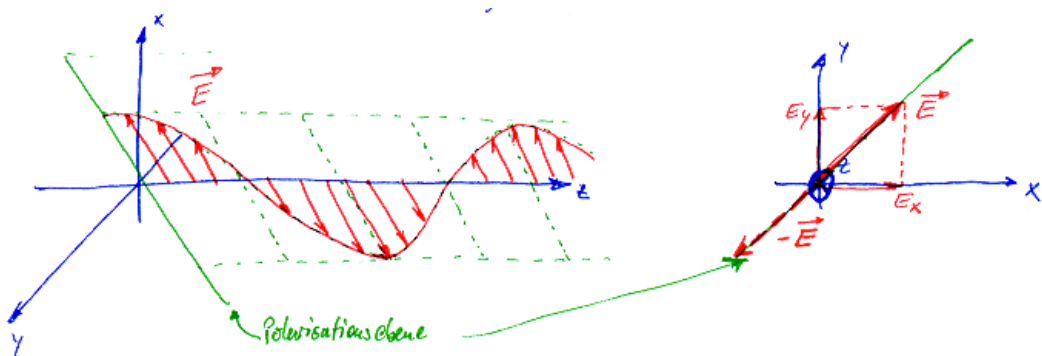
• Polarisation

Schwingt die elektrische Feldstärke (und damit auch die magnetische Feldstärke) nur in einer Ebene, dann nennt man solche Wellen "linear polarisiert".

$$\text{z.B.:} \quad \vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$$

$$\text{mit} \quad E_x = E_{x0} \cos(\omega t - k_z)$$

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - k_z)$$



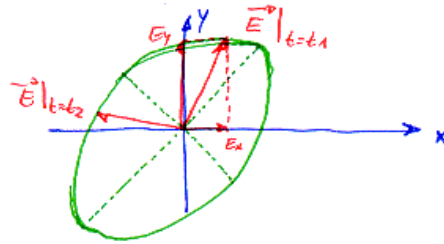
→ \vec{E} kann man sich damit auch als Überlagerung zweier linearer polarisierter ebener Wellen (E_x, E_y) mit gleicher Phasenlage vorstellen.

- Besteht zwischen den Wellen E_x und E_y ein Phasenwinkel φ

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - k_z)$$

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - k_z + \varphi)$$

dann beschreibt die Spitze des Vektors \vec{E} in der xy-Ebene ($z = \text{const.}$ -Ebene) eine elliptische Bahn; man nennt solche Wellen elliptisch polarisiert.



E durchläuft innerhalb der Periode T die Ellipse.

- Sonderfall der zirkular polarisierten ebenen Welle:

$$\varphi = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad ; \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$E_{x0} = E_{y0} = E_0$$

• Stehende Wellen

wenn zwei ebene Wellen gleicher Amplitude, Wellenlänge und Polarisation einander entgegenlaufen

→ die Welle schwingt "auf der Stelle" (ortsfest)

$$\begin{aligned} \text{z.B.:} \quad E_x(z, t) &= E_{x0} \cos(\omega t - kz) + E_{x0} \cos(\omega t + kz) \\ &= 2E_{x0} \underbrace{\cos(kz)} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

↳ räuml. Anteil; für $z = \text{const.}$ → $\cos(kz) = \text{const.}$

$$\begin{aligned} H_y(z, t) &= H_{y0} \cos(\omega t - kz) - H_{y0} \cos(\omega t + kz) \\ &= \frac{E_{x0}}{Z} \cos(\omega t - kz) - \frac{E_{x0}}{Z} \cos(\omega t + kz) \\ &= 2 \frac{E_{x0}}{Z} \sin(kz) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

- Die Felder \vec{E} und \vec{H} sind räumlich **und** zeitlich um 90° phasenverschoben !!

- Ortsfeste Nullstellen (Knoten) des elektr. Feldes:

$$K_z = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad z = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$$

- Ortsfeste Nullstellen (Knoten) des magnet. Feldes:

$$K_z = n \cdot \pi \quad \rightarrow \quad z = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

5.5. Reflexion und Berechnung von elektromagnetischen Wellen

- an der Grenzfläche zweier Dielektrika müssen folgende Randbedingungen erfüllt sein:

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad (5.39)$$

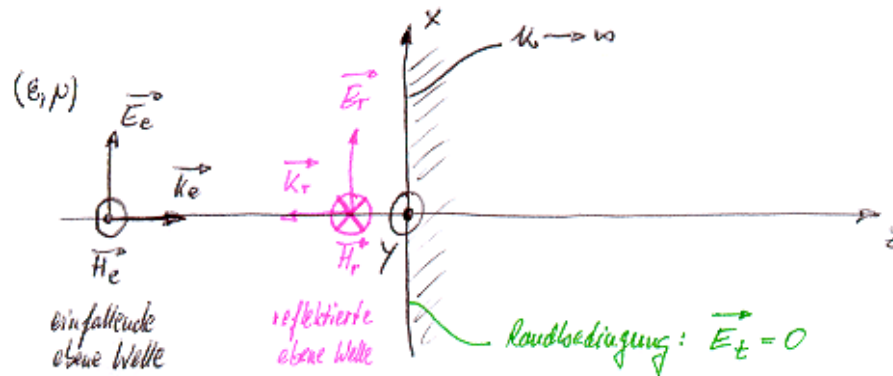
$$D_{1n} = D_{2n} \quad (5.40)$$

$$\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} \quad (5.41)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (5.42)$$

5.5.1. Reflexion an einer ideal leitenden Fläche (Wand)

1) Senkrechter Einfall:



• einfallende Welle:

$$\vec{k}_e = k_e \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_e = E_{e0} e^{j(\omega_e t - k_e z)} \cdot \vec{e}_x \tag{5.43}$$

$$\vec{H}_e = \frac{E_{e0}}{Z} e^{j(\omega_e t - k_e z)} \cdot \vec{e}_y \tag{5.44}$$

(E_{e0}, ω_e, k_e gegeben)

• reflektierte Welle:

$$\vec{k}_r = -k_r \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_r = E_{r0} e^{j(\omega_r t - k_r z)} \cdot \vec{e}_x \tag{5.45}$$

$$\vec{H}_r = -\frac{E_{r0}}{Z} e^{j(\omega_r t - k_r z)} \cdot \vec{e}_y \tag{5.46}$$

• $z=0$: $\vec{E}_e + \vec{E}_r = 0$

zu allen Zeitpunkten

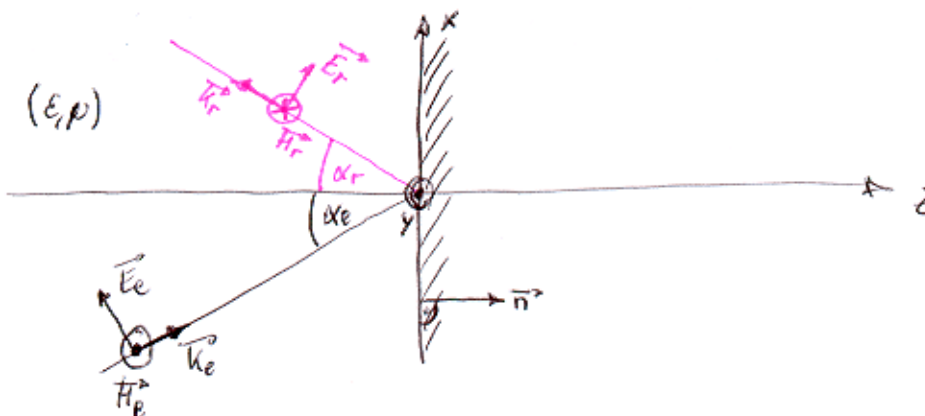
→ $E_{e0} + E_{r0} = 0$ bzw. $E_{r0} = -E_{e0}$ (5.47)

und $\omega_e = \omega_r = \omega$ (5.48)

$k_e = k_r = k = \frac{\omega}{c}$ (5.49)

→ Stehende Wellen im Medium (ϵ, μ)!

2) Schräger Einfall:



• $z=0$: $\vec{E}_t = 0 = (\vec{E}_e + \vec{E}_r) \cdot \vec{e}_x$

$$E_{e0} \cdot \cos \alpha_e - \underbrace{E_{r0}}_{=-E_{r0}} \cos \alpha_r = 0$$

→ $\cos \alpha_e = \cos \alpha_r$

bzw. $\alpha_e = \alpha_r$... Reflexionsgesetz (5.50)

• in der unendlich gut leitenden Grenzfläche treten (Zeitharmonische) Flächenströme und Flächenladungen auf:

$$(3.60): \quad \vec{J}_F = \vec{n}_{(12)} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = -\vec{n} \times \vec{H}_{(1)} \quad (5.51)$$

Fläche \vec{H}_2 \vec{H}_1 $\vec{H}_{(1)}$

$$(1.156) \quad \sigma = \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = -\varepsilon_{(1)} \vec{n} \cdot \vec{E}_{(1)} \quad (5.52)$$

• $z=0$: $\vec{H} = \left(\frac{E_{e0}}{Z} - \frac{E_{r0}}{Z} \right) \vec{e}_y = 2 \frac{E_{e0}}{Z} \vec{e}_y \cdot e^{j\omega t}$

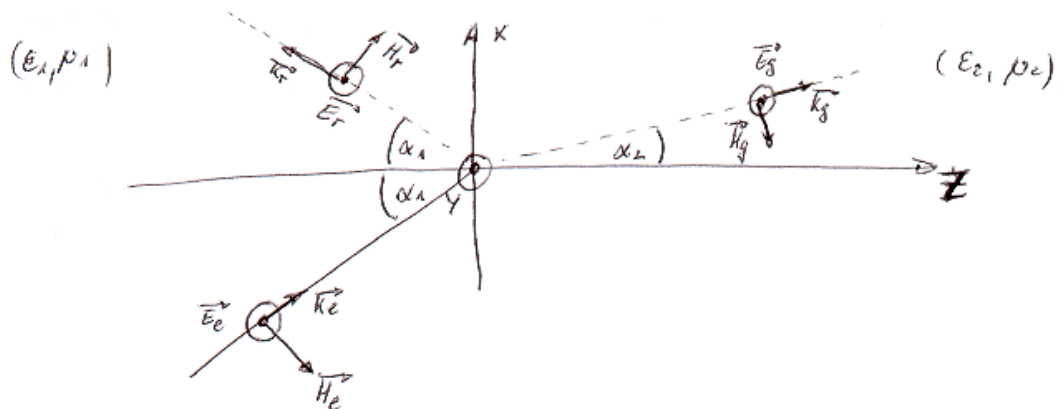
→ $\vec{J}_F = -\vec{e}_z \times \vec{H} = 2 \frac{E_{e0}}{Z} \vec{e}_x \cdot e^{j\omega t}$

$$\sigma = -\varepsilon (-E_{e0} \sin \alpha_e + E_{r0} \sin \alpha_r)$$

$$= 2 \varepsilon E_{e0} \sin \alpha_e \cdot e^{j\omega t}$$

5.5.2. Reflexion und Brechung an der Grenzfläche zwischen 2 Dielektrika

1) Das elektr. Feld liegt senkrecht zur Einfallsebene – senkrechte Polarisation



• auf tretende ebene Wellen

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{e0} \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})} \quad (5.53)$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{r0} \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \quad (5.54)$$

$$\vec{E}_g = \vec{E}_{g0} \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_g \cdot \vec{r})} \quad (5.55)$$

die jeweils dazugehörige magnet. Feldstärke:

$$\vec{H}_* = \frac{1}{Z_*} \left(\frac{\vec{k}_*}{k_*} \times \vec{E}_* \right) \quad * \text{ bei } \vec{H}, \vec{k}, \vec{E} \quad \text{je Index} \quad e, r, g$$

* bei Z (Wellenwiderstand) je nach Index 1, 2

• in der Grenzfläche gilt: (Z=0)

1) $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad :$

2) $\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} \quad :$

3) $B_{1n} = B_{2n} \quad :$

$$1) + 3): \quad \mu_1 \frac{\sin \alpha_1}{Z_1} \underbrace{(E_{e0} + E_{r0})}_{=E_{g0}} = \mu_2 \frac{E_{g0}}{Z_2} \sin \alpha_2$$

$$\rightarrow \quad \frac{\mu_1}{Z_1} \sin \alpha_1 = \frac{\mu_2}{Z_2} \sin \alpha_2 \quad \text{mit } Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{ folgt}$$

$$\text{bzw. } \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \sin \alpha_2 \quad \dots \text{ Brechungsgesetz: (Snellius)} \quad (5.56)$$

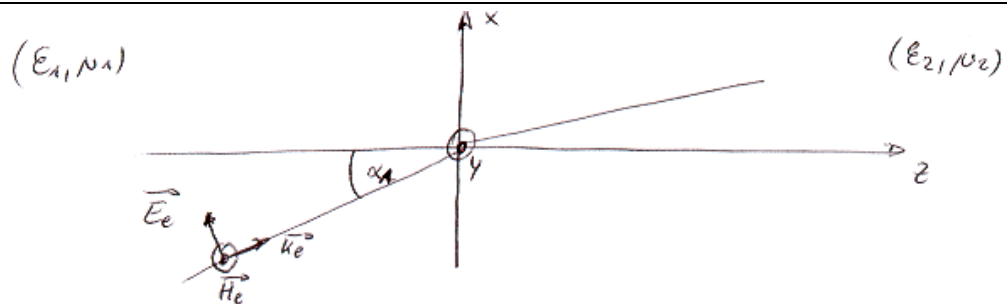
$$\rightarrow \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{k_e}{k_g} = \frac{n_1}{n_2} \quad n_x \dots \text{ Brechungsindex} \quad (5.57)$$

$$1) + 2): \quad \frac{1}{Z_1} \left(1 - \frac{E_{r0}}{E_{e0}}\right) \cos \alpha_1 = \frac{1}{Z_2} \underbrace{\left(1 + \frac{E_{r0}}{E_{e0}}\right)}_{E_{g0}/E_{e0}} \cos \alpha_2$$

$$\frac{E_{r0}}{E_{e0}} = \frac{\frac{1}{Z_1} \cos \alpha_1 - \frac{1}{Z_2} \cos \alpha_2}{\frac{1}{Z_1} \cos \alpha_1 + \frac{1}{Z_2} \cos \alpha_2} = \frac{Z_2 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2} \quad (5.58)$$

$$\frac{E_{g0}}{E_{e0}} = 1 + \frac{E_{r0}}{E_{e0}} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2} \quad \dots \text{ Fresnel'sch Beziehungen} \quad (5.59)$$

2) parallele Polarisation



$$1) \quad \vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} \quad : \quad \frac{1}{Z_1} (E_{e0} + E_{r0}) = \frac{E_{g0}}{Z_2}$$

$$2) \quad \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad : \quad (E_{e0} + E_{r0}) \cos \alpha_1 = E_{g0} \cos \alpha_2$$

$$\left(\frac{E_{r0}}{E_{e0}} \right)_{||} = \frac{Z_2 \cos \alpha_2 - Z_1 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_2 + Z_1 \cos \alpha_1} \quad (5.60)$$

$$\left(\frac{E_{g0}}{E_{e0}} \right)_{||} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_2 + Z_1 \cos \alpha_1} \quad (5.61)$$

|| = Makierung für parallele Polarisation

• Energietransport durch Wellen:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \dots \text{ Poynting-Vektor}$$

↳ zeigt in die Richtung der Wellenausbreitung

$$\text{z.B.: } E_x = E_{x0} \cdot \cos(\omega t - k_z)$$

$$H_y = \frac{E_{x0}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k_z)$$

$$\vec{S} = \frac{E_x^2}{Z} \vec{e}_z = \frac{E_{x0}^2}{Z} \cos^2(\omega t - k_z) \vec{e}_z \quad \dots \text{ Einflussdichte}$$

d.h. die pro Zeit und Flächeneinheit durch eine Fläche transportierte elektromagnetische Energie

$$1) + 2): \left(E_{e0}^2 - E_{r0}^2 \right) \frac{\cos \alpha_1}{Z_1} = E_{g0}^2 \frac{\cos \alpha_2}{Z_2}$$

$$\underbrace{S_e \cos \alpha_1}_{\text{Energie der einfallenden Welle}} - \underbrace{S_r \cos \alpha_r}_{\text{Energie der reflektierten Welle}} = \underbrace{S_g \cos \alpha_2}_{\text{Energie der gebrochenen Welle}}$$

... Energierhaltung

$$\left(1 - \frac{E_{r0}^2}{E_{e0}^2} \right) \frac{\cos \alpha_1}{Z_1} = \frac{E_{g0}^2}{E_{e0}^2} \frac{\cos \alpha_2}{Z_2}$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(\frac{E_{r0}}{E_{e0}} \right)^2}_{R} + \underbrace{\left(\frac{E_{g0}}{E_{e0}} \right)^2}_{T} \frac{Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1} = 1$$

$$\underbrace{R}_{\text{Reflexions}} + \underbrace{T}_{\text{Transmissions}} = 1$$



Indexverzeichnis

[Elektrodynamik II]

Anfangsbedingung	29, 30	ebener	22, 38	Flusses	3, 10, 26
Anfangsbedingungen	30	e-fache	31	fortschreitenden	31
Anfangsfeldes	29	Eichung	8	Fourierintegral	36
Anfangsfeldverteilung	29	eindimensionale	29, 34	freie	20
atomare	17	Eindringtiefe	31	Frequenz	37
atomaren	18	einfallende	39	Frequenzen	37
Atomhüllen	17	Einfallsebene	4, 40	Funktion	37
Aufpunkt	15	Einflussdichte	41	Funktionalen	34
Aufpunkte	15	eingeschwungene	28	Funktionen	29
Ausbreitungsgeschwindigkeit	34	eingeschwungenen	30	Ganghöhen	16
Ausbreitungsrichtung	37	eingeschwungener	30	Gaußkurve	29
Ausrichtung	17	Einheit	8	Gaußkurven	29
azimutal	15	Einschalten	30	Gebiet	10, 11, 21
Bahn	38	Elektrostatik	10, 20, 21, 23	Gebiete	8, 33
Basisvektoren	9	Ellipse	38	Gebieten	11
Bereiche	11, 22	elliptisch	38	Gebietes	11
Bezugsradius	13	elliptische	15, 38	gebundene	20
Bildquelle	5	Energie	3, 23, 24, 41	Gegeninduktivitäten	24
Biot-Savart	3, 10, 14	Energiedichte	23	gerade	11
Biot-Savart'sche	3, 10, 14	Energierhaltung	42	Gerader	3, 11, 13
Biot-Savart'schen	14	Energietransport	37, 41	Gesamtstrom	4, 32
Biot-Savart'sches	3, 10	Entmagnetisierungsfaktors	21	geschlossene	3, 8, 10, 12
Brechungsgesetz	3, 21, 41	Erdoberfläche	3, 5	geschlossenen	7, 11, 26
Brechungsindex	41	Faraday	26	Gesetz	3, 10, 33
cosinusförmige	36	Feldanteil	12, 30	Gesetzes	14
cosinusförmiger	36	Feldbild	10	Gleichfeld	30
Coulomb-Eichung	8, 9, 21, 28	Felddiffusion	4, 29, 30	Gleichstrom	32
dB	10	Felder	3, 4, 17, 28, 34, 38	Graßmann	9
Deltafunktion	29	Feldes	28, 30, 34, 38	Grenzfläche	4, 21, 38, 40
DGL	10, 33	feldfreier	30	Grenzflächen	3, 21
diamagnetische	17	Feldgrößen	33	Grenzübergang	12
Diamagnetismus	17	Feldkomponenten	34	Grundgleichung	4, 27
dichtgewickelte	16	Feldlinie	13	Gruppengeschwindigkeit	4, 37
Dielektrika	4, 34, 38, 40	Feldlinien	7	Halbraum	4, 30
Differentialgleichung	3, 4, 9, 31	Feldprobleme	4, 27	Halbraums	32
differentielle	10, 26	Felds	33	harmonische	36
differentiellen	21	Feldstärke	3, 4, 7, 17, 18, 26, 31, 33, 35, 37, 40	harmonischen	4, 31
differentieller	7	Feldvektor	28	Helmholtzgleichung	28
Diffusion	4, 28, 29, 30	Feldverteilung	29	Herleitung	4, 27
Diffusionsgleichung	4, 27, 28, 29	ferromagnetische	17	Hilfspotentiale	4, 27
Diffusionsgleichungen	28	fiktive	20, 22	hochpermeables	23
Diffusionsprobleme	29	fiktiven	21	homogen	19, 22
Diffusionsvorgänge	28, 33	fiktiver	3, 18	homogene	33
Dipol	3, 10, 18, 22	Fläche	4, 8, 10, 29, 39, 41	homogenen	3, 21, 22
Dipole	17, 18	Flächen	7, 29, 37	homogenes	22
Dispersion	37	Flächendivergenz	21	Hüllfläche	8
Dispersionsbeziehung	4, 36	Flächeneinheit	32, 41	Induktion	8
dispersionsfreies	37	flächenhaft	19	Induktionsgesetz	4, 26, 33
Doppelleitung	13	flächenhafte	21	Induktionsgesetzes	26
Drehimpuls	17	flächenhaften	19	Induktivität	3, 24
dreiecksförmigen	36	Flächenladungen	21, 40	induziert	26
dünne	3, 7, 9, 10, 11	Flächenrotation	21	induzierte	4, 17, 26
dünnen	23, 24	Flächenstromdichte	21	induzierten	4, 31
dünnere	3, 11, 12	Flächenströme	40	infinitesimale	18
Durchflutung	7	Flächenverteilung	19	Innenraum	17, 22
Durchflutungsgesetz	3, 7, 12, 33	Fluß	8, 24	innerhalb	16, 38
Durchflutungsgesetzes	3, 8, 13, 16	Flussdichte	3, 8, 20, 21	instationäre	8
ebene	4, 34, 35, 36, 37, 38, 40	flusserzeugender	24	Integrale	15, 26
ebenen	22, 38			integraler	3, 8

Integralsatzes	7, 19	Material	23	Schwund	26
Integration	13, 14, 35	Materialbeziehungen	27	Selbstinduktivitäten	24, 25
invariant	28	Materialgleichungen	33	Skalarpotential	3, 10, 13, 21
irreversibler	28	Materialkenngrößen	33	Skineffekt	4, 30
kartesische	12	Materie	3, 17, 20	Snellius	41
Knoten	38	Materiefeld	20	Spannung	4, 6, 26
Kobalt	17	Maxwell	4, 7, 8, 21, 26, 33	Spannungen	28
Komponenten	34	Medien	20, 27, 33, 34	Speicherung	2
Kontinuitätsgleichung	8	Medium	3, 4, 6, 20, 28, 31, 33, 34, 37, 39	Spiegelungsmethode	5
Koordinaten	12	Näherung	4, 27	Spin	17
koordinatenfreier	18	nichtleitende	34	Spitze	38
Koordinatensystems	9	Nickel	17	Spule	16, 24
Koordinatentransformation	12	Normalkomponente	5	Spulen	24
Körper	3, 4, 19, 21, 26, 27	Oberfläche	32	stationäre	3, 5, 7
Körpern	4, 26	Osted	7	stationärer	3, 7
Kraftwirkung	7	orientiert	7	statische	8
Kreisförmige	3, 14	ortsabhängig	31	Stehende	4, 38, 39
kreisförmigem	3, 13	ortsfest	38	stetiger	14
Kreisfrequenz	36	ortsunabhängigen	9	Strom	16, 24
Kreisschleife	15	paramagnetische	17	Stromdichte	5, 8, 10, 20
Kreisströme	17	Paramagnetismus	17	Stromdichteverteilungen	19
Kugel	21	Periode	38	Stromdipols	10
Kugelelektrode	6	periodialer	30	Stromdurchflossenen	7
Kugelerder	3, 5	Permanentmagnete	17	Ströme	3, 7, 19, 20, 28
Kugelkoordinaten	15	Permeabilität	8	Stromelementes	10
Kurve	26	Permeabilitätszahl	20	Stromfaden	3, 11
Kurven	29	Phase	31, 37	Stromfäden	7, 9
lange	7, 16	Phasengeschwindigkeit	4, 31, 37	stromfreie	8
langen	24	Phasenlage	38	stromfreien	10
Längeneinheit	4, 16, 24, 32	phasenverschoben	38	stromführende	11
langer	3, 12	Phasenwinkel	31, 38	stromführenden	7, 8
Laplace-Gleichung	10	physikalisch	27	Stromkreise	12
Legierungen	17	Platte	21	Stromschleife	18
Leiter	3, 7, 11, 12, 13, 27	Poissongleichung	9, 20	Strömungsfeld	3, 5, 7, 10
Leiterdicke	24	Poissongleichungen	9	Strömungsfelder	3, 5
Leitern	7, 8, 20, 24	Polarisation	4, 21, 37, 38, 40, 41	Strömungsfeldern	3, 8
Leiterschleife	3, 11, 14, 24	polarisiert	37, 38	Stromverteilungen	3, 10
Leiterschleifen	3, 9, 10, 23, 24	polarisierten	38	Superpositionsprinzip	7
leitfähigen	28, 33	polarisierter	38	Suszeptibilität	17
Lichtgeschwindigkeit	34	Potential	3, 5, 10, 11	Teilfelder	16
linear	37	Potentiale	4, 28	Teilinduktivitäten	24
lineare	20, 27, 33	Potentials	8	TEM	4, 35, 36
linearer	17, 38	Potentialverteilung	6	temperaturabhängig	17
Linienladung	22	Poynting-Vektor	41	TEM-Welle	36
Logarithmus	12	Punktelektrode	3, 5	Tiefenerder	3, 5, 6
Lorentz-Eichung	28	Punktförmige	3, 5	transienten	30
Lorentzkraft	26	Punktladung	10	transienter	30
Magnetfeld	3, 7, 15, 17, 20, 21, 22, 26	Punktquelle	5	Transversal	4, 35
Magnetfelder	4, 26	quadratischen	24	Trennflächen	11
Magnetfeldern	3, 8, 11	quasistationäre	4, 26, 27, 28	überlagern	33
Magnetfeldes	3, 4, 10, 30	quasistationären	4, 27	Überlagerung	16, 36, 38
magnetisch	28	quasistationärer	27	Übertragung	37
magnetische	3, 7, 8, 10, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 31, 33, 37	Quelle	3, 5	Umläufe	11
magnetischen	3, 7, 8, 10, 17, 18, 21, 23, 26, 28, 33	quellenfreies	10	Umlaufspannung	26
magnetischer	3, 8, 18, 22, 26, 28	Quellenfreiheit	8, 20, 33	umschließen	11
magnetisches	3, 10, 13, 15, 17, 18	Quellpunktsvektor	5	Vakuum	20, 35
Magnetisierbare	3, 21	Querschnitt	3, 13	Vakuums	8
magnetisiert	17	raumladungsfreie	33	Variante	19
magnetisierter	19, 22	räumlich	19, 29, 38	Vektor	8, 9
Magnetisierung	3, 18	räumlichen	19	Vektorbeziehung	9
Magnetisierungskurve	17	Rechtssystem	35	Vektordiffusionsgleichung	27
Magnetisierungsstromdichte	19	reflektierte	39	Vektorfeld	27
Magnetisierungsstromdichten	19	Reflexion	4, 38, 39, 40	vektorielle	9
Magnetisierungsströme	19, 20	Reflexionsgesetz	40	Vektorpotential	3, 8, 10, 13, 15, 17, 19, 21
Magnetisierungsströmen	19	Ringspannung	26	Vektors	38
Magnetisierungsvektor	17	rückwärts	28	Verallgemeinerung	3, 8
Magnetnadeln	7	rückwärtslaufende	36	Verlustleistung	32
Magnetostatik	3, 7, 18, 20, 21	rückwärtslaufenden	35	Verschiebungsstromdichte	8
makroskopische	18	ruhende	4, 26	Verschiebungsstrom	8
makroskopischen	18	ruhenden	27	Verteilung	4, 31
		Schräger	39	Volumendichte	18
		schwingt	38	Volumenelement	18

Volumina	8	Wellenlänge	36, 37, 38	Zeitharmonische	4, 28, 31, 40
vorwärtslaufenden	35	Wellenlängen	36	Zeitharmonischen	4, 30
Wand	4, 39	Wellenpakete	36	Zeitumkehrung	28
Wechselfeldes	30	Wellenwiderstand	35, 40	zeitunabhängige	7
Weg	7, 13, 26	Wellenzahl	36	zeitunabhängigen	35
Wegelement	14	Wellenzahlvektor	37	Zerfließen	28, 29
Welle ..	4, 31, 34, 35, 36, 37, 38, 39	Windungen	16	zirkular	38
Wellen4, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41		Wirbel	20	zusammenhängenden	11
Wellenausbreitung	27, 41	wirbelfrei	20	zusammenhängendes	11
Wellenausbreitungsvorgänge	33	Wirbelströme	4, 31	Zylinder	21, 22
Wellengleichungen	34	Wirbelstromverluste	4, 31	Zylinderkoord	11
Wellengleichung	4, 33, 34	zeitabhängige	8	Zylinderkoordinaten	12
Wellengleichungen	4, 33	zeitabhängigen	3, 8, 35	Zylinderspule	3, 16
		Zeitableitung	26, 28		